Florica T. Câmpan

COLECȚIA ALFA

PRINTRE LINII ȘI SUPRAFEȚE

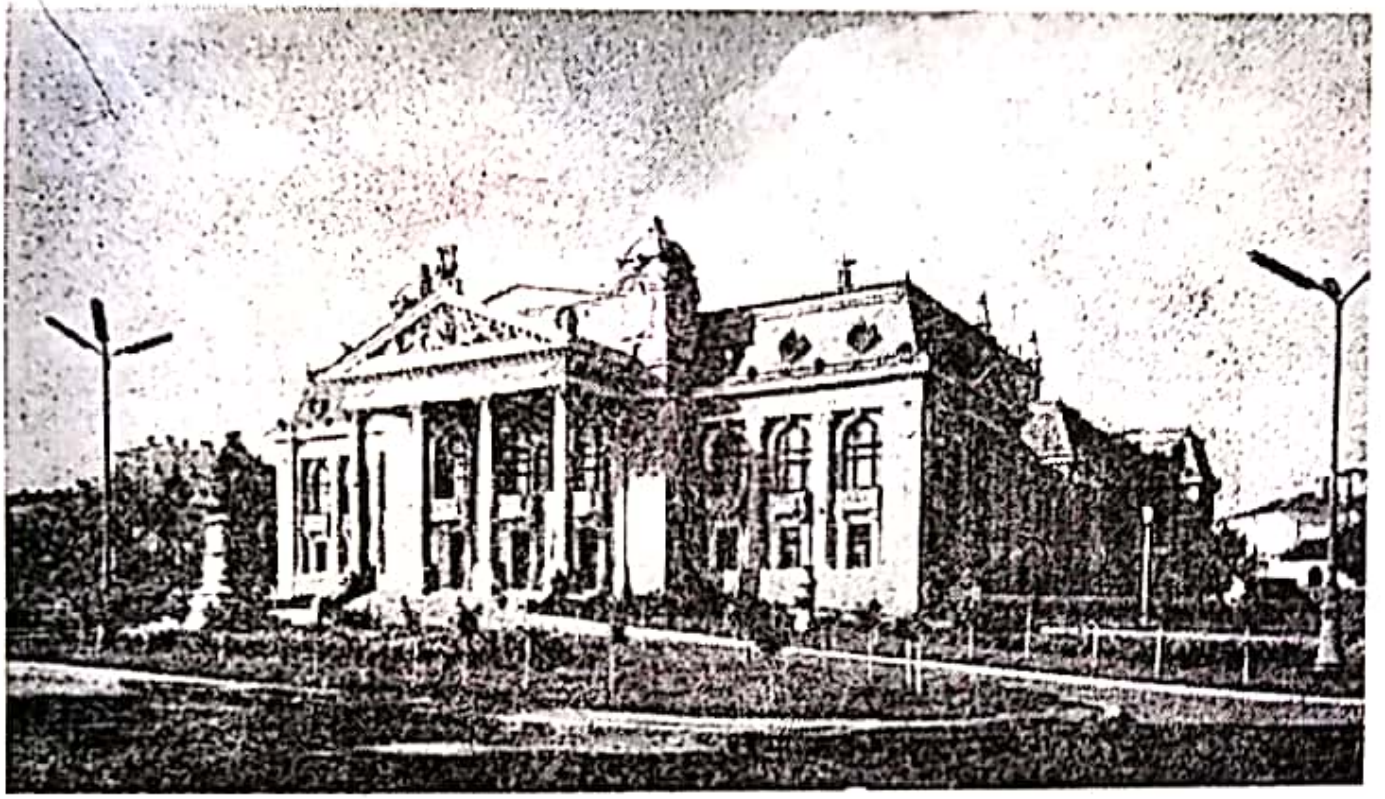
COLECȚIA

Coperta și ilustrațiile
BURSCHI GRUDER.

FLORICA T. CÂMPAN

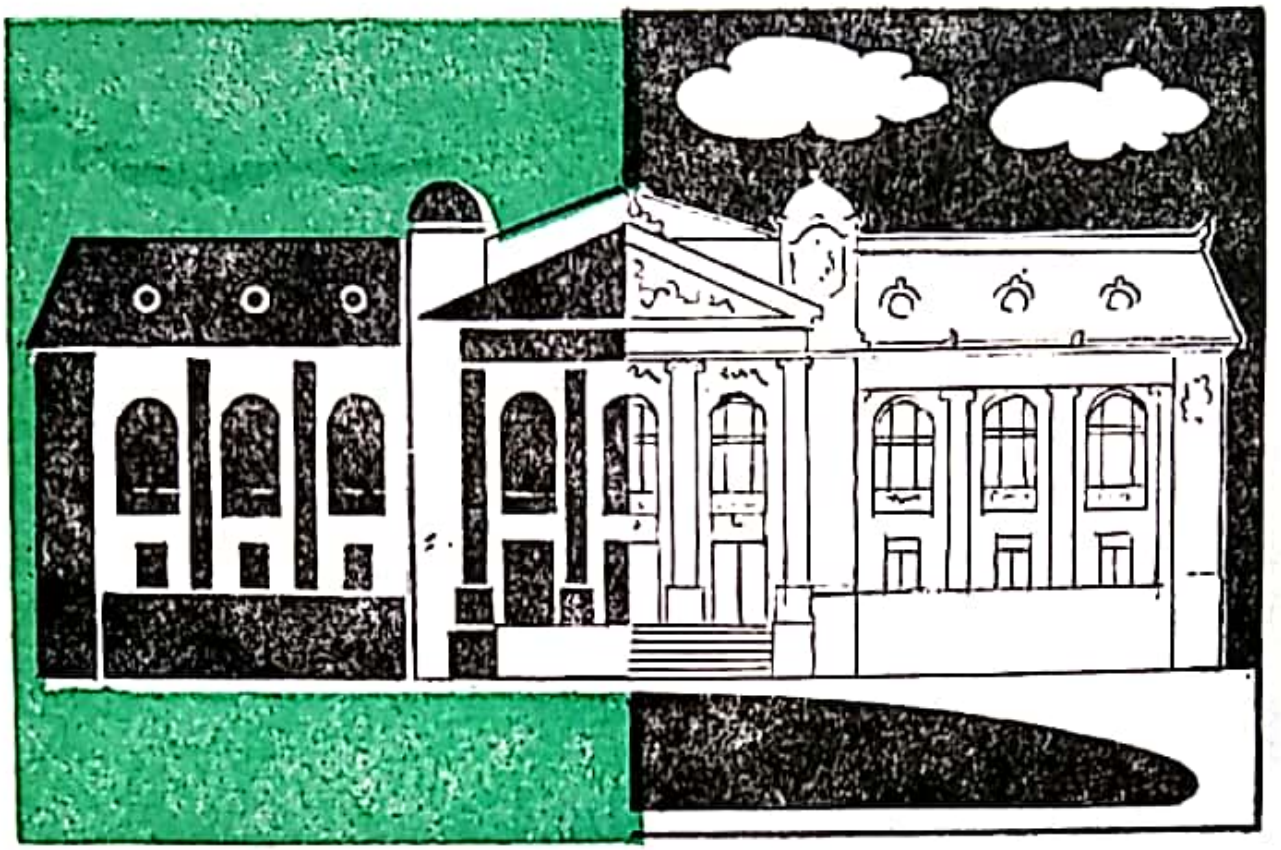
PRINTRE LINII ȘI SUPRAFEȚE

EDITURA ION CREANGĂ BUCUREȘTI — 1973



Linia dreaptă

În fața noastră avem imaginea Teatrului Național Vasile Alecsandri din Iași. Lăsînd deoparte elementele decorative, din arhitectura lui se desprind o mulțime de linii drepte — verticale, orizontale sau oblice — de linii curbe, de suprafețe și de volume, înlănțuite cu măiestrie într-un tot care impresionează prin armonie și frumusețe. Fiecare dintre aceste elemente geometrice, folosite



de arhitect ca să realizeze specificul clădirii, are o istorie proprie și ar putea deține un rol de seamă într-o fantastică piesă care să poarte numele de „Istoria civilizației". Ca să asistăm la reprezentarea ei nu ar fi nevoie să intrăm în sală și să așteptăm ridicarea cortinei. Actul întîi ar putea începe chiar acum, folosind ca scenă cîteva așezări omenești din decursul sutelor de milenii ce ne despart de primii oameni și, ca decor, chiar desenul Teatrului Național Vasile Alecsandri.

Coloanele de la intrare sînt imagini în piatră ale copacilor din pădurile unde trăiau oamenii

care au întrezărit întîia-oară *linia dreaptă*. Nu cunoșteau ei multe vorbe și nici nu puteau gîndi prea adînc, dar știau să se cațere bine pe copaci și să-i deosebească pe cei înalți și drepți de cei piperniciți și strîmbi. Desigur că priveau cu plăcere și mirare *linia dreaptă* a copacilor maiestuoși. Ea se deosebea în multe privințe de toate celelalte linii prin care se fixau în mintea lor marginea frunzelor și a florilor, discul soarelui sau secera lunii, conturul munților, al dealurilor sau al stîncilor, ori hotarul unui lac. Mai întîi fiindcă de-a lungul tulpinelor înalte și drepte privirea lor putea aluneca, fără opreliște, pînă sus în înaltul cerului. Așadar, linia dreaptă *luneca pe ea însăși*, întocmai ca și raza de soare ce se

strecura prin spărtura unui nor sau întocmai ca urma pietrii scăpată din praștie, ca să atingă vînatul. Apoi, fiindcă doborît de fulger, sau de secure, trunchiul unui copac drept, culcat la pămînt, dădea o anume impresie de *stabilitate* și *echilibru*, sugerînd să-l așeze ca punte peste apele repezi ale unui pîrîu. Culcat la pămînt, copacul a apărut oamenilor ca o nouă înfățișare a liniei drepte și de aceea i-au dat o numire nouă — *orizontală* — spre deosebire de cealaltă — *verticală*. Alături de aceste două numiri, linia dreaptă a mai căpătat și o a treia, corespunzătoare poziției copacului înclinat, gata să cadă la pămînt, anume *oblică*. Cînd au început să se construiască case din bîrne, stîlpii *verticali* erau legați prin trunchiurile de copac așezate *orizontal* și proptiți de drugi puși *oblic*. Tot de pe atunci, cineva mai isteț trebuie să fi născocit *dreptarul*, cu care se verifică și azi dacă un stîlp sau un perete nu-i înclinat, ci *stă drept pe verticală*, dacă un drum *este croit drept* și nu se abate cumva într-o parte.

Deși aveau să mai treacă zeci de mii de ani pînă cînd linia dreaptă va fi privită ca un *element geometric*, fără lățime și grosime, oamenii i-au

descoperit de mai înainte cea mai minunată proprietate a ei, aceea că *este ca un fir bine întins între capetele lui.* Cu alte cuvinte, *linia dreaptă leagă două puncte făcînd cea mai mare economie de fir*, adică *ea este drumul cel mai scurt dintre două puncte.*

Cîtă bucurie a avut acela care a construit primul arc cu săgeţi, îndoind o ramură şi întinzînd-o cît a putut de tare, fără ca să rupă sfoara ce-i lega capetele! O împletise din coajă de copac sau din buruieni, cine mai ştie? Cuvîntul pe care l-am moştenit noi: *linia* se trage de la *linum,* care în latineşte înseamnă *in, pînză.* Desigur că, la rîndul lor, romanii l-au adoptat dintr-o altă limbă mai veche, dar în care cuvîntul avea aceeaşi semnificaţie, de fir ce trebuie întins.

Prin aceste calităţi, linia dreaptă şi-a făcut loc nu numai în preocupările zilnice, de natură practică ale oamenilor, ci a fost adoptată şi ca model de atitudine faţă de viaţă. Nu există popor care să nu aibă devize de forma: „gîndeşte drept"! „spune drept"! „priveşte drept"! sau expresii ca „ce-i drept", „la drept vorbind..." etc. Ni le-au transmis strămoşii şi, într-o formă sau

alta, le repetăm mereu, și azi, ca de pildă: „Purcede drept și biruie-n furtună“, cum i-a plăcut lui Tudor Arghezi să pună „Inscripție pe o ușă“.

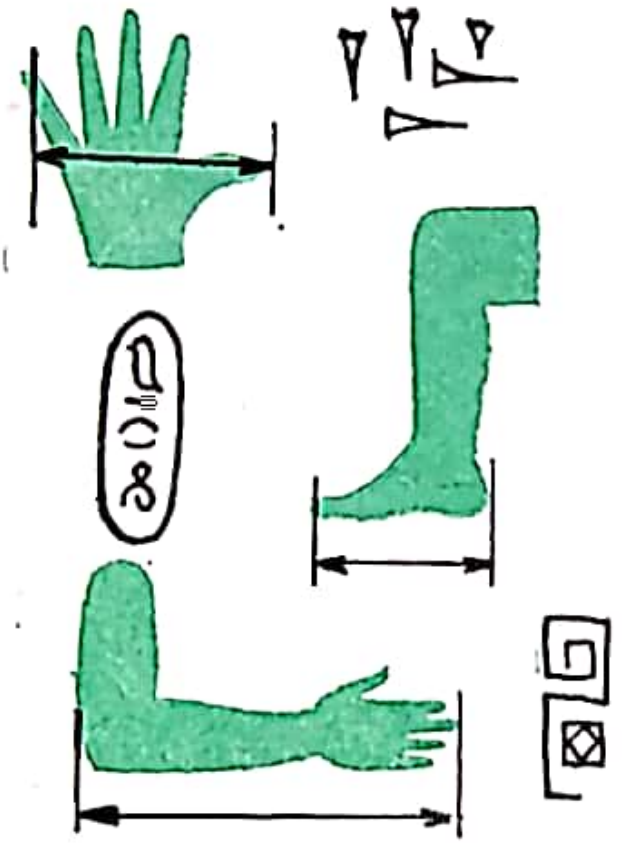
Distanța dintre două puncte

Întinzînd funia de cele două capete, ca să fie linie dreaptă, omul a făcut o descoperire senzațională, aceea că *linia dreaptă este drumul cel mai scurt dintre două puncte*. Poate că observase el faptul și din privire, dar acum îl aflase prin măsurare. Această experiență a însemnat un prim pas înspre civilizație, fiindcă atunci s-a înțeles că o bucată de linie dreaptă putea fi comparată cu o alta, a cărei lungime era cunoscută, stabilindu-se astfel dacă una era mai mare, egală sau mai mică decît cealaltă și cu cît. S-a ajuns astfel la ideea de *unitate de măsură* a lungimilor. În mod practic, aproape toate popoarele, din orice parte a pămîntului, au ales ca unități: *lungimea*

pasului sau a *piciorului*, sau a *cotului*, a *palmei* etc. Aceste unităţi au fost marcate pe o funie, însemnîndu-se prin două noduri, extremităţile lungimei respective. Funia a devenit astfel cel mai ingenios şi de folos instrument de care s-au folosit oameni, ca să croiască drumuri, ca să măsoare haturile ogoarelor, pentru a-şi da seama de cîtă sămînţă aveau nevoie pentru a le însămînţa, ca să construiască fie hambarele pentru a depozita recolta, fie case şi palate, fie bărci şi corăbii, fie altare de jertfă şi temple.

O statuie care se păstrează la Muzeul Luvru din Paris, reprezentîndu-l pe Gudea, unul dintre guvernatorii din veacul al XXIII-lea î.e.n. ai sumerienilor, îl arată aşezat şi ţinînd pe braţ planul unui oraş, redus la scară, şi, alături de plan, o riglă gradată. Era copia după unitatea de lungime pe care o întrebuinţau sumerienii în al III-lea mileniu î.e.n. Fără îndoială că nici unul dintre popoarele de atunci nu măsura cu metrul. Metrul, care este astăzi o unitate internaţională de măsură a lungimilor, a fost introdus mai întîi în Franţa, în 1795, îndată după revoluţie. Dar folosirea lui a devenit obligatorie din 1840. La noi în ţară, sistemul metric a fost recunoscut prin legea din 1 ianuarie 1866.

Unități vechi de lungime



Vechile unități de măsură a lungimilor nu erau nici tocmai exacte și nici tocmai fixe. Ele variau din loc în loc iar, în același loc, din timp în timp, deși păstrau aceleași numiri care le indicau și originea: *degetul*, *palma*, *cotul*, *piciorul* etc. La babilonieni, de pildă, *mîna de zidar* avea 10 degete, iar *mîna deschisă* avea 15 degete, *piciorul* avea 20 de degete și *cotul* 30 de degete.

Ca unități mai mari erau: *trestia* = 6 coți, *funia măsurătorului de teren* = 120 de coți și *leghea* = 180 de funii. Egiptenii, chinezii și celelalte popoare vechi măsurau lungimile tot cu *palma*, *piciorul*, *cotul* etc., numai că lungimile unităților care purtau aceleași numiri nu erau identice. Și la noi în țară unitățile de măsură erau altele în Moldova și altele în Muntenia.

În Muntenia : prăjina = 3 stînjeni, stînjenul muntenesc = 8 palme, *palma* = 10 degete, iar degetul avea 10 linii. Ultimul stînjen muntenesc, numit al lui Şerban Vodă, avea cam 1,97 m şi era mai mic decît stînjenul moldovenesc, care era de 2,23 m. În Moldova prăjina avea tot 2 stînjeni, dar moldoveneşti, iar stînjenul 8 palme.

De aici înainte începe deosebirea şi de numire, căci palma moldovencască era împărţită în 8 *palmace*, iar un *palmac* avea 12 linii. Acestea erau însă unităţi de lungime pentru cîmp. Pînza se măsura cu *cotul*. Oare mai este nevoie să spunem că nu era chiar aşa de uşor, ca azi, să se facă calcule cu aceste unităţi de măsură, care nu se transformau printr-o simplă schimbare de virgulă, aşa cum se petrece în sistemul metric zecimal? Şi mai ales cînd trebuiau calculate arii, volume ori capacităţi!

Unghiul drept

Descoperirea unghiului drept trebuie să se fi făcut cam în acelaşi timp cu a liniei drepte, căci însuşi copacii cei înalţi şi drepţi făceau un unghi

drept cu umbra lor. În mod intuitiv, s-a înțeles de atunci că toate unghiurile drepte sînt egale. De altfel deschizătura dintre două degete alăturate, trebuie să fi atras atenția oamenilor și asupra unghiului ascuțit! Dar cum a învățat omul să construiască unghiul drept, fără de care nu ar fi putut așeza temelie nici uneia dintre celebrele monumente rămase din negura vremurilor? Cum au procedat toate popoarele antichității: egiptenii, sumerienii, chinezii, hindușii și celelalte, ca să deseneze pe teren un unghi drept? Poate cu echerul? Nicidecum! Tot cu funia! Iată metoda care reprezintă încă o mare descoperire a oamenilor de pe vremea cînd nu știau să scrie! Grecii, care au cunoscut mai îndeaproape procedeele egiptenilor și au învățat de la

ei cum să le aplice, au numit pe acei specialiști în trasarea perpendicularelor pe teren *harpedonapți*, cuvîntul grec *harpedonaptai* însemnînd chiar *întinzător de funii*. Funia folosită de harpedonapți era împărțită în părți egale prin noduri. În locul unde trebuia fixat vîrful unghiului drept se bătea un țăruș și în ță ruşse fixa un nod al funiei (dar nu dintr-un capăt). Apoi se trăgea de la un capăt al ei, în direcția indicată pe plan, pînă la cel de al patrulea nod al funiei care era fixat pe pămînt printr-un al doilea țăruș. Se obținea astfel o latură a unghiului drept. Se numărau mai departe 5 noduri și al cincilea nod al acestui capăt de frînghie se înnoda cu un al treilea nod din celălalt capăt. După ce funia legată era bine întinsă, se înfigea țărușul acolo unde arăta nodul comun. Dacă vă uitați bine la figura care s-a format, nu-i greu să vedeți că avem de-a face cu un triunghi dreptunghic, în care cele două catete au 3 și 4 unități de lungime, iar ipotenuza 5 unități. Noi spunem azi că formula $3^2 + 4^2 = 5^2$ reprezintă teorema lui Pitagora. Egiptenii ca și toate celelalte popoare antice care au creat o civilizație înaintea grecilor nu aveau de unde ști că peste 2000—3000 de ani se va naște Pitagora, care va stabili, în mod teoretic, adică

Filozoful grec *Aristotel* (384—322 î.e.n.) a fost unul dintre cei mai de seamă oameni de știință din antichitate. Deși nu a fost matematician, în scrierile lui sînt discutate cele mai de seamă probleme puse atunci. Aristotel a inventat dicționarul și este primul care a avut ideea să așeze cărțile și obiectele din colecțiile sale după alfabet. Elevul său, Eudem din Rodos, a scris o istorie a geometriei și a astronomiei din care s-au păstrat anumite fragmente datorită cărora se poate reconstitui o parte din trecutul acestor științe.

prin demonstrație că *în orice triunghi dreptunghic suma patratelor catetelor este egală cu patratul ipotenuzei.* Ei au găsit acest adevăr prin încercări repetate de nenumărate ori și l-au folosit în viața practică, alături de alte cunoștințe de geometrie, aflate pe aceeași cale experimentală. De atunci ni s-a transmis și numirea de *ipotenuză*, căci în grecește *hipotenusa* înseamnă *latura care se întinde.*

Într-o lucrare despre istoria geometriei, scrisă, acum vreo 2300 de ani, de Eudem din Rodos, elevul lui Aristotel, se arată că inundațiile anuale ale Nilului făceau să dispară hotarele care despărțeau ogoarele egiptenilor. Aceasta a fost și cauza care a condus la descoperirea *geometriei.* Cuvîntul ce traducea exact acest fapt (măsurarea pămîntului) a fost creat de către greci, fiind compus din *geo — pămînt* și *metron — măsură.*

Geometria este cu adevărat geometrie?

După cum se știe, de la problemele practice de măsurare a ogoarelor sau de calculare a ariilor, a capacităților ori a volumelor, matematicienii greci au trecut în mod treptat la probleme de natură teoretică. Asta înseamnă că ei au încercat să afle, prin judecată logică, ce fel de relații se pot stabili între elementele figurilor sau ale corpurilor geometrice, desenate cu rigla și compasul. Se pare că începutul acestui nou mod de a privi geometria l-a făcut Thales din Milet, care a călătorit mult prin Egipt, curios să cunoască tainele științei ce adusese faima acelei țări. Numai că cele ce a aflat, deși se arătau a fi cunoștințe foarte importante și foarte utile în aplicațiile practice: calcularea ariei unui cerc sau a volumului unui trunchi de piramidă, i-au adus mai multă surpriză decît bucurie. Nimeni nu-i putea explica de ce trebuia să procedeze așa cum i se arăta, ca să calculeze aria unei suprafețe sau volumul unui corp și nu altfel? La întrebările lui pline de nedumerire i se răspundea imediat:

— Așa se face!

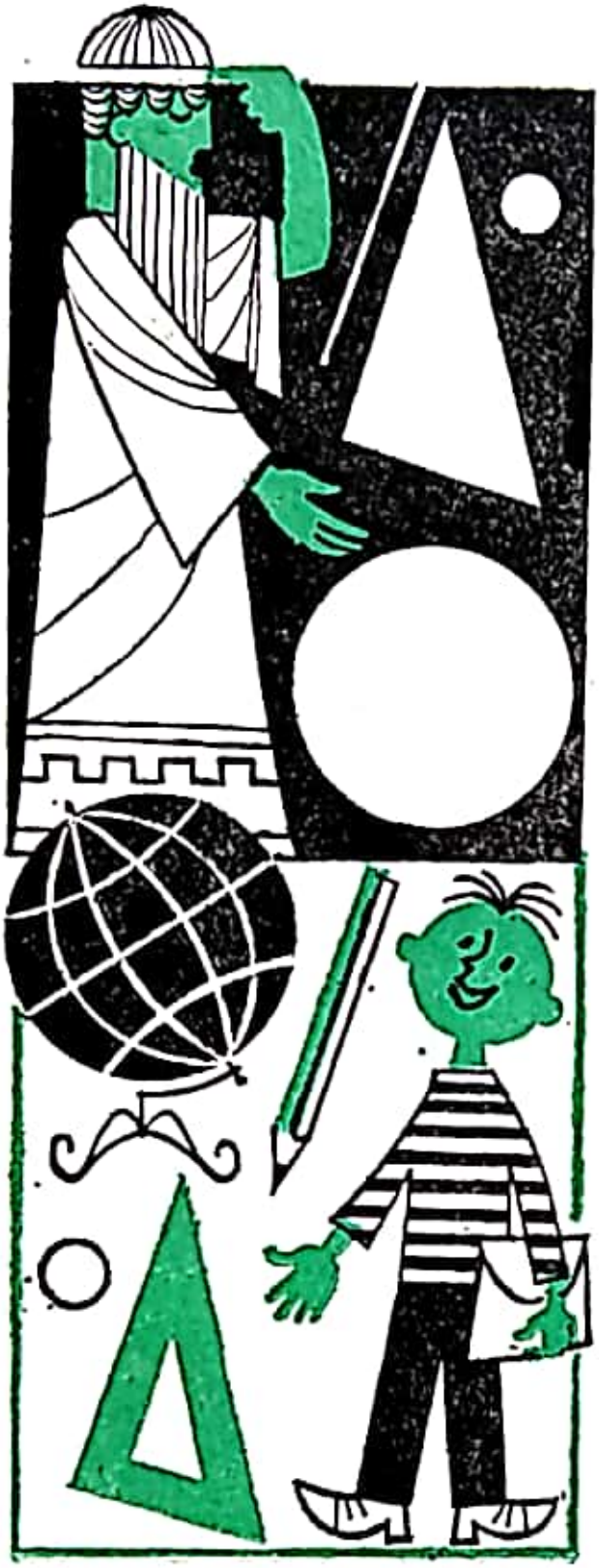
— Nu! a răspuns atunci Thales, și după aceea toți geometrii greci care i-au urmat. Ca să stabilești capacitatea unui hambar sau aria unui cerc nu-i de ajuns să cunoști *cum se procedează*, ci trebuie să-ți dai seama tu însuți *de ce se face așa* și *de ce procedeul* rămîne valabil pentru orice corp geometric care are forma de paralelipiped sau de cerc etc.

Drumul pe care a apucat Thales era cu totul necunoscut și nu se știa unde va duce. Surprizele au fost uimitoare și au început prin schimbarea sensului cuvîntului ce denumea obiectul. Căci Geometria, așa cum au înțeles-o matematicienii greci și așa cum este privită în epoca actuală, *nu mai are nici un fel de legătură cu măsurarea pămîntului*, ci se ocupă de proprietățile și de relațiile de mărime sau de poziție care există între figurile sau corpurile geometrice.

Thales din Milet (624—548 î.e.n.), unul dintre cei 7 înțelepți ai Greciei antice, a fost inginer, negustor, matematician, astronom etc. În toate aceste îndeletniciri el a arătat o iscusință deosebită și a avut o activitate rodnică. Ca matematician a calculat înălțimea piramidei lui Keops cu ajutorul umbrei unui băț înfipt la capătul umbrei lăsată de piramidă. Aceasta arată că el cunoștea teoremele de asemănare ale triunghiurilor. Despre el au rămas mai multe anecdote. În una dintre ele se spune că o dată, pe cînd transporta sare, unul dintre măgarii care o purtau a alunecat într-un pîrîu. Apa dizolvînd o parte din sare a făcut ca sarcina măgarului să devie mai ușoară. La al doilea transport, măgarul s-a rostogolit el singur în apă. Ca să-l dezveațe, a treia oară, Thales l-a încărcat cu bureți, ceea ce a îngreuiat mult povara măgarului cînd s-a cufundat din nou în apă.

Ce este abstractizarea?

O minge albă, ușoară, de ping-pong sau un glob terestru mai greu, de tablă colorată, cu harta continentelor și a oceanelor, au formă sferică, dar nu sînt chiar sfere, adică nu sînt corpuri geometrice. Ele sînt *corpuri reale* din spațiul înconjurător. Ca să se transforme în *corpuri geometrice* trebuie să le trecem printr-o baie mintală de *abstractizare*. În această baie de abstractizare corpurile se curăță de toate însușirile fizice ce le-au



avut mai înainte și rămîn *forme pure sau corpuri geometrice.* Astfel, dintr-un creion destul de gros rămîne o linie subțire și lungă care nu mai păstrează nimic din materialul din care a fost făcut. Dintr-un echer dispare lemnul, culoarea, gradațiile de pe el și se transformă în *cele trei segmente* de linie dreaptă, care se unesc între ele, închizînd un unghi drept, adică într-un *triunghi dreptunghic.* Tot așa, mingea și globul au ieșit din baia de abstractizare ca *două sfere* de raze diferite, fără culoare, fără să se mai știe din ce materiale au fost fabricate; acum ele se deosebesc numai prin mărime, și nu prin greutate sau alte calități ce le aveau mai înainte,

Cum au apărut teoremele?

E uşor de înţeles că *formele geometrice* obţinute prin despuierea *corpurilor reale* de proprietăţile lor fizice, nu existau decît în imaginaţia matematicienilor greci. Ori, cu asemenea *corpuri abstracte* nu se puteau face experienţe, fiindcă ele nu puteau fi cîntărite, lor nu li se puteau stabili nici duritatea sau elasticitatea, nici calităţile optice, magnetice, electrice ş.a.m.d. Singura cale de cercetare a proprietăţilor lor geometrice rămînea raţionamentul logic aplicat figurilor desenate sau modelate în spaţiu, prin care erau reprezentate. Desigur că nici aceste figuri nu corespundeau întocmai *formei abstracte*, căci, în desen, linia nu are numai *lungime*, ci şi *lăţime*, iar o figură plană tăiată dintr-un material oricît de subţire ar fi are totuşi şi o anumită grosime. Dar aceste neajunsuri erau înlăturate în mod tacit. Vorbind despre geometrii — în cartea a VI-a din *Republica* — Platon observa: „Tu ştii că cei ce se ocupă de geometrie se folosesc de figuri vizibile şi fac judecăţi asupra lor deşi nu se gîndesc la aceste figuri, ci la altele cu care ele se aseamănă. Astfel, ei fac raţionamente asupra patratului în sine, asupra diagonalei în

Platon (429—347 î.e.n.) s-a născut la Atena şi a fost discipolul şi prietenul lui Socrate, iar apoi profesorul lui Aristotel. A fost un filozof idealist, conducător al unei şcoli din Atena ce purta numele de *Academia*, fiindcă discuţiile aveau loc în grădina eroului grec Academos.

Deşi filozofia sa a fost îndreptată contra materialismului Academia lui Platon a avut meritul de a fi considerat că studiul matematicilor era absolut necesar ca să se poată înţelege filozofia. Platon însuşi nu a fost matematician, dar a învăţat matematicile cu Teodor din Cirene (sec. V î.e.n.). În lucrările sale filozofice —scrise în formă de dialoguri, în care Socrate este principalul interlocutor — sînt amintite principalele probleme matematice ce se dezbăteau pe atunci. Pe poarta grădinii lui Academos era pusă inscripţia: *Nimeni nu intră aici dacă nu-i geometru.*

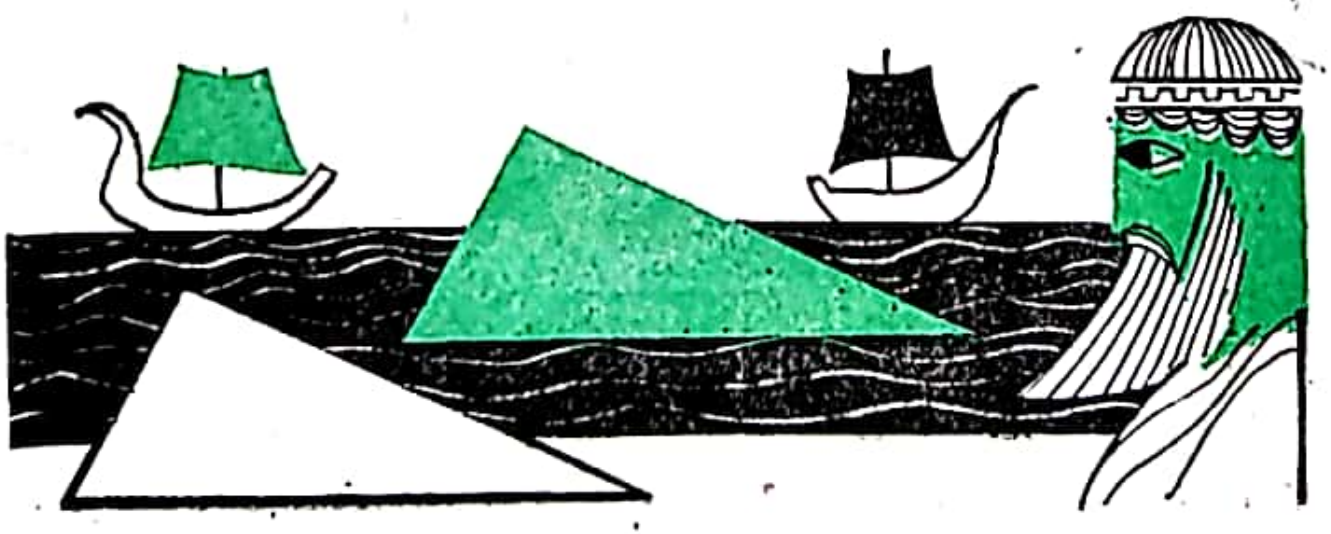
sine şi nu asupra diagonalei pe care au desenat-o... Aceste figuri sînt pentru ei numai nişte imagini, dar ei nu se gîndesc decît la celelalte figuri, care nu

pot fi concepute decît cu mintea". Aşadar, după cum fizica foloseşte experienţa pe corpurile *reale*, geometria foloseşte *raţionamentul logic* pe figuri închipuite prin desen.

Adevărurile stabilite în acest mod se numesc *teoreme*. Cuvîntul *theorema* de origine greacă înseamnă *obiect de studiu* — iar *raţionamentul logic* — *demonstraţie*. Teorema demonstrată se aplică, fără nici o restricţie, la toate corpurile reale. Aşa se explică larga aplicaţie a geometriei — şi în general a matematicilor — în toate celelalte domenii ale ştiinţei şi ale tehnicii.

Se pare că prima teoremă, demonstrată de primul geometru grec, *Thales*, se referă la cerc:

Diametrul unui cerc împarte cercul în două părţi egale. Prin ce metodă a găsit Thales rezultatul nu se mai ştie, pentru că de la el nu a rămas nimic



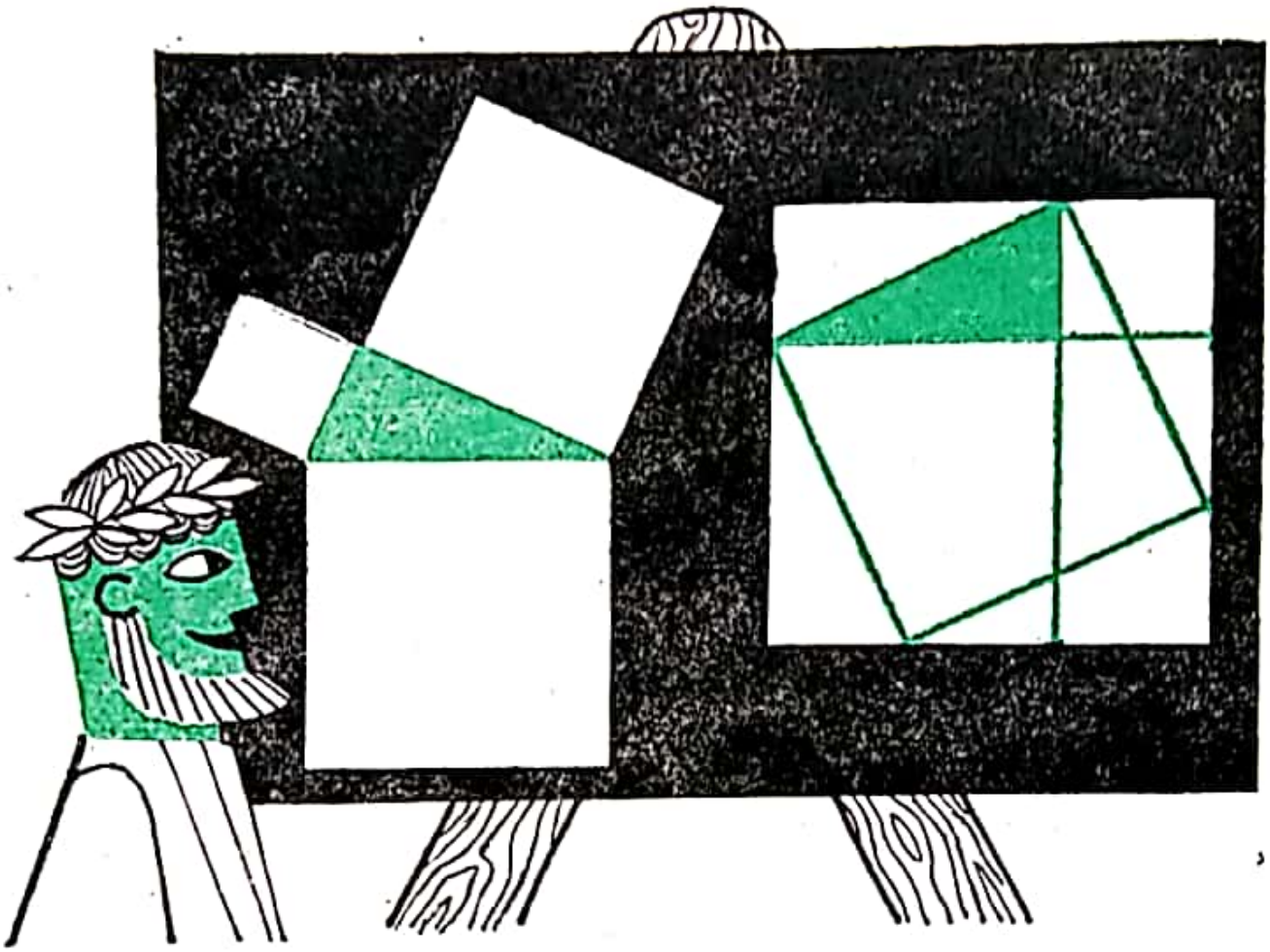
scris. Azi însă se cunosc destule alte demonstrații ale acestei teoreme și unele dintre ele se află în manualele școlare respective. O altă teoremă, pe care tradiția o atribuie tot lui Thales, este legată de unul din cazurile de egalitate a triunghiurilor: *Două triunghiuri sînt egale dacă au o latură și unghiurile adiacente respectiv egale.* Despre această teoremă, unul dintre filozofii comentatori greci, numit *Proclus* (sec. V e.n.) — care avusese ocazia să citească întreaga istorie a geometriei scrisă de Eudem, azi pierdută — ne-a transmis această informație: *În istoria sa asupra geometriei, Eudem scria că Thales a descoperit această teoremă și că a folosit-o ca să măsoare distanța corăbiilor pe mare.* Dar teorema care l-a încîntat cel mai mult pe Thales, așa de mult încît după ce a descoperit-o se spune că a mulțumit zeilor aducînd ca jertfă un taur, a fost teorema care arăta că *orice punct de pe cerc, unit cu extremitățile unui diametru formează un unghi drept.*

După Thales, Pitagora a stabilit mai multe proprietăți ale *triunghiului dreptunghic*, care l-au condus și la celebra teoremă ce-i poartă numele. Deși această teoremă a fost cunoscută, pe cale empirică și într-o formă particulară de cele mai multe dintre popoarele antice din Orientul Apropiat

și din cel Îndepărtat, toți comentatorii matematicilor greceşti sînt de acord să atribuie lui Pitagora paternitatea acestei teoreme, una dintre cele mai importante și cu cele mai numeroase aplicații din geometrie. Ca și în cazul lui Thales, tradiția amintește de o jertfă de 100 de bivoli adusă de Pitagora drept mulțumire zeilor, pentru bucuria ce a avut-o, cînd a descoperit teorema despre patratul ipotenuzei. În ce formă a stabilit Pitagora demonstrația nu se mai știe, fiindcă nici de la Pitagora nu au rămas lucrări scrise. E sigur însă că demonstrația lui avea la bază calculul ariilor patratelor construite pe cele trei laturi ale triunghiului deoarece, fiind vorba de numere ridicate la patrat, acest fel de operații erau privite de matematicienii greci ca aparți-

Pitagora (569—500 i.e.n.) filozof și mare matematician grec, a trăit cam în aceeași epocă cu Thales. În școala înființată de el, matematicile dețineau locul principal, fiindcă, pe lîngă cercetările științifice, întreaga lor filozofie se baza pe teoria numerelor, numerele întregi fiind privite ca esența tuturor lucrurilor din Univers. Obiectele de învățămînt erau împărțite în patru secții: teoria numerelor sau aritmetica, teoria numerelor aplicate sau muzica, teoria mărimilor în stare de repaos, adică geometria și teoria mărimilor în stare de mișcare sau astronomia. Această împărțire a fost numită de romani *quadrivium* și a dăinuit pînă în timpul Renașterii. Pitagoreicii au fost și primii care au folosit cuvîntul *matematică*, provenit din cuvîntul grec *matima* = *subiect de învățătură*, cu înțeles de aritmetică și geometrie.

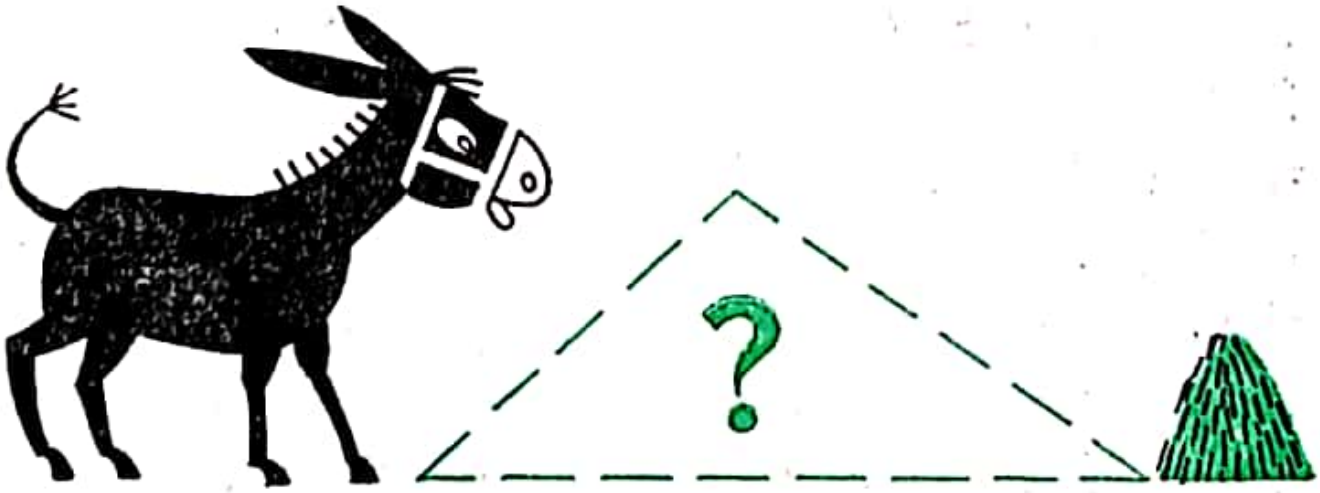
nînd geometriei și nu — așa cum se întîmplă azi — aritmeticii. Matematicienii greci considerau ca numere numai întregii din șirul natural: 1, 2, 3 ... Așadar, *patratul unui număr* nu mai reprezenta un nu-



măr, ci *o mărime* și anume *aria unui patrat*, tot așa după cum *produsul a două numere* se interpreta prin *aria unui dreptunghi*, cu acele dimensiuni. O altă teoremă bine cunoscută este și cea întîlnită sub numele de *puntea măgarului*. *În orice triunghi, o latură este mai mică decît suma celorlalte două*. Ea ne-a fost transmisă din antichitate. O

relatează tot Proclus, în felul următor: *Epicurienii aveau obiceiul să-și bată joc de această teoremă, zicînd că este evidentă și unui măgar și că de aceea nu are nevoie de nici o demonstrație...* Iar *că măgarul cunoaște această teoremă, o deduc ei de acolo că, dacă punem fînul la celălalt capăt al laturii, măgarul va merge de-a lungul acestei laturi, iar nu de-a lungul celor două, ca să-și ia hrana.*

Epicur (341—270 î.e.n.), filozof grec, adept al Școlii atomistice, înființată de Leucip și continuată de Democrit. El susține că plăcerea este binele suprem, dar înțelegea prin plăceri numai pe acelea provenite din cultură și studiu. Printr-o falsă interpretare, numele de epicurian este astăzi adesea întrebuințat în sensul contrar învățăturii lui Epicur, și anume, de adept al plăcerilor grosolane, al ospețelor, de exemplu.

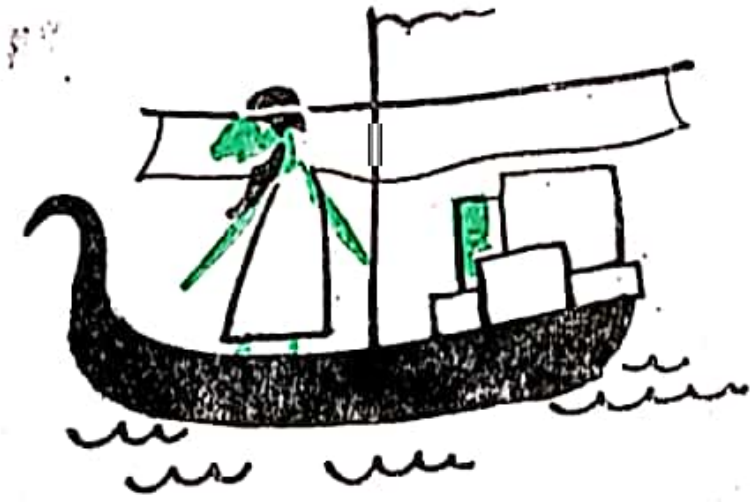


Cine a pus bazele geometriei?

Se pare că mai toţi gînditorii greci, începînd cu Thales, au fost puternic impresionaţi de faptul că un adevăr geometric odată stabilit devine punct de plecare în dovedirea altuia şi că acest „procedeu în lanţ", cum am spune azi, putea fi continuat oricît de departe. După primele rezultate expuse de Thales în Şcoală sa din Milet, vechi port din Asia Mică la Marea Egee, s-au găsit mulţi discipoli care să cerceteze cu rîvnă şi pasiune proprietăţile figurilor sau ale corpurilor geometrice şi la rîndul lor, să întemeieze şi să conducă noi şcoli de geometrie. Astfel, Anaximandru (610—543 î.e.n.), care a şi urmat lui Thales la conducerea Şcolii din Milet, a stabilit multe dintre proprietăţile sferei şi chiar le-a aplicat. Ca şi Thales, Anaximandru a avut mulţi elevi şi printre ei se pare că a fost şi Pitagora. Şcoala condusă de Pitagora a avut mai multe reşedinţe. Mai întîi tot în Asia Mică, la Samos şi apoi în sudul Italiei, la Tarente, Croton şi Metaponte. Prin rigurozitatea metodelor de cercetare introduse de el, şcoala sa a contribuit foarte mult la dezvoltarea geometriei. După mărturia lui Proclus, *Pitagora*

a transformat studiul geometriei, ridicîndu-l la principii superioare prin rezolvarea problemelor în mod abstract numai cu ajutorul raţiunii. Dar, cu o floare nu se face primăvară şi nici cu teoremele demonstrate de Thales şi Pitagora nu s-a putut închega geometria, fiindcă această ştiinţă înseamnă ceva mai mult decît un aglomerat de adevăruri demonstrate logic. Se pare că faptul acesta a fost înţeles chiar de pitagoreicii care s-au străduit să dea, aşa cum arată şi Proclus, un caracter cît mai abstract şi perfect logic problemelor geometrice tratate de ei, pregătind astfel calea spre marea transformare care avea să se înfăptuiască peste două veacuri prin apariţia *Elementelor* lui Euclid. Dar pînă atunci, sub influenţa directă a învăţăturii lui Thales sau a lui Pitagora, chiar

din secolul al V-lea î.e.n., au început să apară, pe rînd, în multe dintre orașele grecești din Asia Mică, din Grecia sau din sudul Italiei, alte școli filozofice în care predomina preocuparea pentru cercetările din domeniul geometriei. Astfel, la sud de Milet, în Chios se afla școala condusă de Oinopides (sec. V î.e.n.), despre care se afirmă că a introdus metoda construcțiilor exacte a figurilor, folosindu-se rigla și compasul în locul echerului și al raportorului. Din aceeași școala a făcut parte și Hipocrat din Chios. În jurul anilor 450—430 î.e.n. el se afla la Atena, unde dădea lecții



Hipocrat din Chios (sec. V î.e.n.) nu a aparținut nici unei școli, dar a fost unul dintre cei mai pricepuți geometri. La început s-a ocupat cu comerțul și se spune că într-o călătorie pe mare, vameșii din Bizanț l-au păgubit de foarte mulți bani. Acest fapt l-a dezgustat

într-atît încît s-a lăsat de comerț și a început să studieze geometria. Pe lîngă soluțiile ce le-a dat în cazul unor probleme celebre, Hipocrat este cel mai vechi geometru care a compus un tratat de geometrie intitulat *Elemente*. Această lucrare este astăzi pierdută probabil fiindcă nu a mai prezentat vreun interes după ce au apărut *Elementele* lui Euclid. Se știe că o bună parte din lucrarea lui Hipocrat a fost folosită de Euclid, în *Elementele* sale.

de matematici, dar, pentru prima oară după cît se pare, pe bani!

Cam tot pe atunci Xenofon din Colofon, alt discipol al Școlii din Milet, aflat în Italia, a pus bază școlii din Eleea. Aceasta număra printre discipolii ei pe filozoful Parmenide și pe elevul său, Zenon (495—435 î.e.n.), rămas celebru prin paradoxele imaginate de el ca să atragă atenția matematicienilor de atunci asupra pericolului de a folosi în geometrie, fără un discernămînt sever, noțiunea de infinit. Alți matematicieni, despre ale căror lucrări vom vorbi mai tîrziu, au numele legate de urmă-

Cuvîntul *paradox* este de origine greacă și e format din *para — contra* și *doxa — părere*, așadar *paradox* înseamnă o părere contrară celei obișnuite. Se cunosc 4 paradoxe pe care Zenon le-a prezentat matematicienilor, punîndu-i în încurcătură, pentru că prin ele el nega realitatea mișcării și a timpului. Ele sînt: 1) al dichotomiei (care se împarte prin tăierea în două părți); 2) Ahile și broasca țestoasă; 3) Săgeata; 4) Stadionul. Dintre acestea, cel mai cunoscut

este acela al lui Ahile şi broasca ţestoasă, în care se spune că „Ahile, cel iute de picior, nu putea ajunge broasca ţestoasă care se afla cu 100 de paşi înaintea lui pentru că, deşi Ahile alearga de 100 de ori mai repede decît broasca, atunci cînd Ahile a făcut primii 100 de paşi şi broasca a făcut un pas, apoi, în timp ce Ahile a făcut acest pas, broasca a făcut şi ea o sutime dintr-un pas şi aşa mai departe, oricît de mic ar fi intervalul dintre Ahile şi broască, el nu putea fi niciodată epuizat. După cum se vede, în realitate Ahile a întrecut broasca după cel de-al 101-lea pas, dar raţionamentul rămîne valabil dacă se ţine seamă de împărţirea dusă la infinit a unui segment de dreaptă. De remarcat că tocmai asupra acestor subtilităţi de raţionament se insista în discuţiile care se năşteau între reprezentanţii diferitelor curente filozofice.

toarele oraşe: *Democrit* din Abdera (460—370 î.e.n.), *Anaxagora* din Clazomene (500—428 î.e.n.), *Hippias* din Elis (sec. V î.e.n.), *Bryson* din Heracleea (sec. V î.e.n.), Eudoxus din Cnide (408—355 î.e.n). etc. Începînd din anul 479 î.e.n., cînd grecii au cîştigat războaiele cu perşii, Atena a devenit, după dorinţa exprimată chiar de Pericle, „şcoala

întregii Ellade". De atunci, timp de aproape un secol și jumătate s-au dezbătut aici cele mai importante probleme ale geometriei de către cei mai renumiți învățați, aparținînd diferitelor școli și curente, atrași, din toate colțurile Greciei, de măreția acestui oraș.

Așa, de pildă, pe la 440 Anaxagora din Clazomene, prietenul lui Pericle, se stabilește, la îndemnul acestuia, în Atena. Tot aici se aflau Arhitas din Tarente (428—365 î.e.n.), Teetet din Atena (414—369 î.e.n.) ș.a. Alături de acești geometri, alții, mai puțin iluștri, erau gru-

Am văzut că școala condusă de Platon a luat numele de *Academie* după numele lui *Academos*, fostul proprietar al grădinii unde își avea școala sediul. La fel și școala condusă de Aristotel s-a numit *Lyceum* din cauză că în grădina în care Aristotel obișnuia să-și țină cursurile se afla templul lui *Apollon Lykeion*. Și, din cauză că în timp ce se țineau aceste cursuri, atît Aristotel, cît și discipolii lui se plimbau prin grădină, *aristotelicii* au căpătat porecla de *peripatetici* de la *peripatos*, care în greceşte înseamnă *plimbare*. Cei ce aparțineau de școala lui Protagora se numeau *sofiști*. Cuvîntul grec *sofiste* înseamnă *înțelept*. Mai tîrziu însă el și-a schimbat sensul, indicînd pe acei ce folosesc un raționament fals, imaginat anume cu intenția de a induce în eroare. Aceasta se datorește mai ales scrierilor lui Platon în care sofistul era arătat ca un învățător ambulant ce cîștigă bani prin predarea științelor, spre deosebire de *filozof*, adică *iubitor de înțelepciune*.

Filozoful nu pretindea că este *posesor de înțelepciune* (sofiste) și nu urmărea nici un cîștig din predarea științelor celor doritori să și-o însușească!

pați în jurul unor școli de filozofie în care se studia geometria. *Academia* condusă de Platon, *Lyceum-ul* de Aristotel, sau școala îndrumată de Protagora (480—411 î.e.n.), din care făcea parte Teodor din Cirene (sec. V î.e.n.) și Antifon (sec. V î.e.n.).

Toți acești învățați ai Elladei, pasionați de geometrie, și încă mulți alții au contribuit la crearea geometriei ca o știință de sine stătătoare.

Cum s-au pus bazele geometriei?

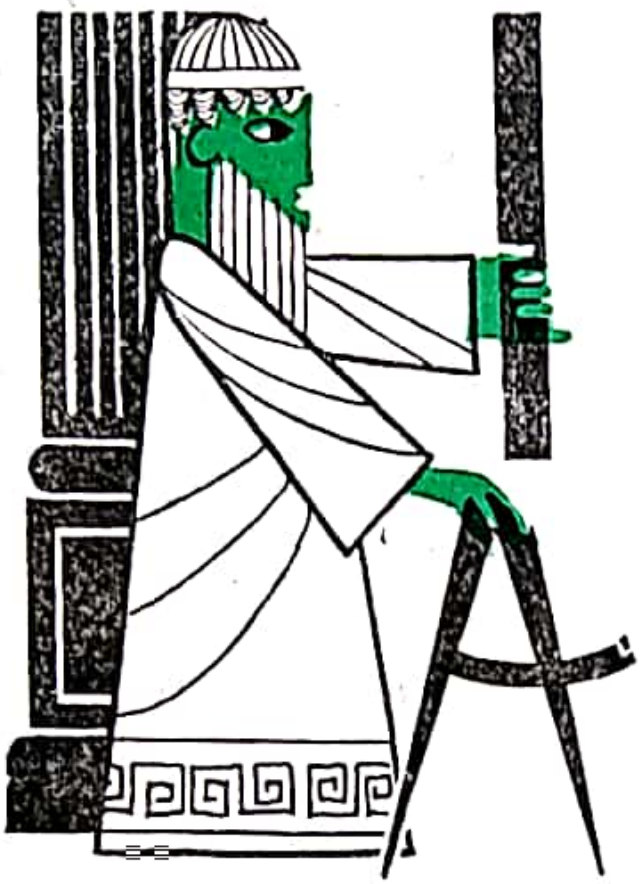
Nu trebuie să ne închipuim că geometrii pe care i-am amintit mai înainte preluau una sau mai multe dintre problemele propuse de predecesorii sau învățătorii lor, ca să dezvolte capitol după capitol din geometria ce se învață azi la școală. Lucrurile s-au petrecut cu totul altfel. Fiecare geometru se ocupa de problemele care-i plăceau lui și, de multe ori, soluțiile pe care le găsea el erau altele și chiar contrare acelora găsite de alți geometrii. Acest fapt a condus la multe discuții înverșunate și la contraziceri rămase celebre în istoria matematicilor. Cu timpul s-au îngrămădit

atîtea teoreme încît era greu să se mai știe dacă un anumit subiect fusese tratat sau nu, de către cine și în ce fel. În această stare de haos a încercat să facă oarecare ordine Hipocrat din Chios. El a compus o carte, numită *Elemente*, în care a adunat, într-o ordine, considerată de el ca fiind cea mai potrivită, toate teoremele și problemele despre triunghiuri, despre teorema lui Pitagora, despre cerc și despre măsurarea unghiurilor, despre poligoanele regulate înscrise și circumscrise cercului etc. Desigur că geometrii de atunci și cei ce au urmat după Hipocrat, bucuroși de această ordine necesară, au continuat să stabilească alte adevăruri noi sau să dea noi demonstrații, mai concise sau mai riguroase, acelora care se găseau expuse în *Elementele* lui Hipocrat. Cele mai multe dintre discuțiile cu privire la sistematizarea și completarea acestor Elemente au avut loc în școlile conduse de Protagora, Platon și Aristotel. De pildă, Teodor din Cirene, elev al lui Protagora, a cercetat îndeaproape problema rădăcinilor patrate ale numerelor întregi care nu erau patrate exacte, ca $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ etc. Azi fiecare știe că aceste rădăcini patrate sînt numere. De asemenea, Teudius din Magnesia (sec. IV

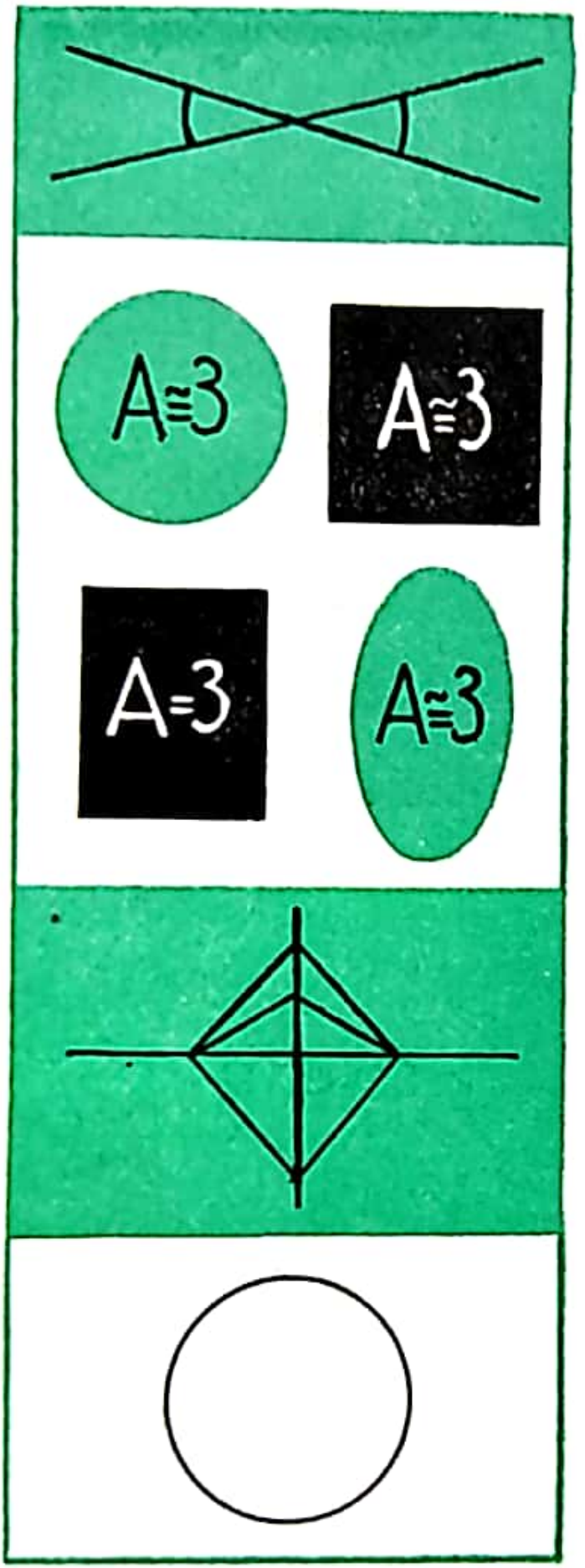
î.e.n.), elev al lui Platon, ținînd seama de modificările introduse în lucrarea lui Hipocrat, a compus un nou tratat de geometrie, iar mai tîrziu pe baza acestor realizări, în școala lui Aristotel s-au despărțit problemele de aritmetică de acelea de geometrie, s-a simplificat metoda de expunere a demonstrațiilor, punîndu-se litere figurilor și s-au analizat îndeaproape bazele logice ale geometriei. Se pregătea astfel știința geometriei, dar avea să mai treacă aproape un secol pînă să se înfăptuiască această minunată transformare a întregului depozit de adevăruri geometrice, într-un tot armonios, asemenea unei ființe vii. Ca să putem urmări acest eveniment mai îndeaproape se cuvine să cunoaștem cîteva dintre problemele particulare ce preocupau atunci pe învățați, deși azi acestea ne apar așa de simple, că nu ne vine a crede că au putut fi vreodată altfel.

Despre unghiuri și împărțirea lor

Se pare că Thales a descoperit că unghiurile opuse la vîrf sînt egale. Ca să deseneze unghiurile el și elevii lui foloseau rigla gradată. Tot cu rigla



și raportorul desenau un unghi egal cu un unghi dat sau împărțeau un unghi în două ori în mai multe părți egale. Această metodă de a se folosi rigla, echerul și raportorul căpătase o largă aplicație și chiar Hipocrat a folosit-o în construcțiile pe care le făcea ca să demonstreze proprietățile figurilor. De-abia Oinopides ridică obiecții asupra acestui procedeu, susținînd că numai prin folosirea riglei fără gradații și a compasului se pot obține figuri precise. El a arătat cum se duce o perpendiculară cu rigla și compasul și cum se construiește, în același mod, un unghi și bisectoarea lui. Metoda introdusă de el a plăcut așa de mult geometrilor, încît după aceea ei au introdus ca regulă generală, să nu mai admită nici o construcție care să nu fie executată cu rigla și compasul. Foarte probabil că în această decizie s-au lăsat ademeniți



de faptul că proprietățile dreptei erau oarecum înrudite cu ale cercului. Căci dacă e adevărat că dreapta este cel mai scurt drum între două puncte, *cercul este cea mai scurtă linie curbă dintre toate liniile curbe sau poligonale care limitează o arie dată.* Iar dacă punctele unei drepte se află la egală depărtare de două puncte fixe și punctele cercului sînt toate la aceeași depărtare de un punct fix, numit *centrul* lui. În plus, atît dreapta cît și cercul au și extraordinara proprietate că pot aluneca de-a lungul lor înșile. De aceea, nu-

mai aceste linii puteau să fie folosite ori de cîte ori apăreau cazuri de mișcări de alunecare, de exemplu la mașini, pistoane, roți, rotații în jurul unei axe etc. Pe lîngă aceste proprietăți fundamentale, poate că dreapta și cercul au fost preferate în locul altor linii și pentru că din cele mai vechi timpuri s-au păstrat în forma lor modelele a două dintre cele mai impresionante fenomene din natură: *linia dreaptă* este *drumul razei de lumină*, iar *cercul* este *drumul stelelor pe bolta cerească*. De altfel, cei dintîi astronomi și toți astronomii pînă prin veacul al XVII-lea au considerat că nu numai stelele, ci și toate celelalte corpuri cerești au o mișcare circulară.

Totuși, limitarea construcțiilor geometrice numai la acelea în care era posibilă folosirea acestor două instrumente, rigla și compasul, nu a fost o inspirație fericită. Geometrii de atunci nu s-au întrebat,

și chiar dacă ar fi făcut-o nu ar fi putut răspunde, dacă rigla și compasul sînt capabile să rezolve orișice construcție geometrică, așa cum li se părea în mod intuitiv că ar fi cazul. Ori, aceasta nefiind cu putință ei au fost puși în situația să sufere consecințele ce au urmat din cauza alegerii lor. Necazurile au început chiar de la cele mai simple probleme, cum a fost, de pildă, problema împărțirii unui unghi în trei părți egale.

Trisecția unghiului

S-ar părea că dacă împărțirea cu rigla și compasul a unui unghi în două, în patru sau într-un număr pereche de părți egale, este o treabă ușoară, nu ar putea fi prea grea nici aceea de a împărți un unghi în trei părți egale, folosind de asemenea rigla și compasul. Acest lucru este imposibil, dar iluzia că ar putea fi, era așa de puternică, încît a momit pe mulți matematicieni de seamă să încerce puterea judecății sau a ingeniozității lor ca să găsească o atare construcție.

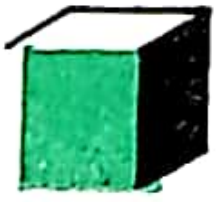
Părea de mirare că o problemă, care se rezolvă imediat dacă se folosește rigla și raportorul,

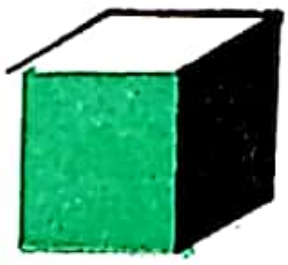
să nu poată fi dezlegată cu rigla și compasul, într-un mod asemănător aceluia folosit la bisectarea unghiului. Explicația, care nu-i de loc elementară, nu a fost găsită decît în secolul al XVIII-lea, atunci cînd algebra începuse să dea un ajutor substanțial geometriei prin aplicarea rezultatelor obținute de ea. Dar chiar din sec. V î.e.n. trisecția unghiului a fost realizată de către Hippias din Elis, cu ajutorul unei alte curbe, deosebită de cerc, pe care tot el a reușit să o trasează, inventînd un aparat special. Dar această soluție a fost considerată de natură *mecanică* și nu geometrică și deci nu a fost acceptată ca satisfăcătoare.

Alte două probleme, la fel de celebre, la care matematicienii greci nu au putut folosi rigla și compasul, sînt duplicarea cubului și cvadratura cercului.

Problema delică sau a duplicării cubului este legată de următoarea legendă: În Atena bîntuia odată o ciumă cumplită. Locuitorii orașului, neștiind cum să mai ostoiască molima, au hotărît să consulte oracolul din Delfi, din insula Delos. Răspunsul a fost dat de însuși zeul Apollo, care cerea ca să se dubleze altarul din templul consacrat

lui. Cum altarul avea forma unui cub, atenienii l-au stricat și au construit altul cu latura de două ori mai mare. Dar ciuma a continuat să secere viețile omenești. Atunci atenienii s-au adresat din nou oracolului și, de data aceasta, răspunsul a fost uluitor: „Studiați mai bine geometria!“ Gîndind la înțelesul acestor cuvinte, atenienii și-au dat seama că altarul construit de ei nu era de două ori mai mare decît cel vechi, ci de opt ori mai mare. Ei au încercat să repare greșeala, căutînd latura cubului al cărui volum să fie de două ori mai mare decît al unui cub dat. Însă, oricît au încercat geometrii greci nu au putut găsi o construcție, cu rigla și compasul, din care să rezulte lungimea muchiei cubului căutat. Ca și în cazul trisecției unghiului, au fost găsite soluții ale problemei cu ajutorul altor curbe decît ale dreptei și cercului. Dar atunci ele au fost respinse. Prima soluție de acest gen, adică *mecanică*, a fost stabilită de către Hipocrat din Chios, altele





au fost descoperite de Arhitas din Tarente, apoi de discipolul acestuia, Eudox din Cnide, și, în fine, de elevul lui Eudox, anume Menechmus (sec. IV î.e.n.). Și în acest caz explicația imposibilității construcției cu rigla și compasul a putut fi înțeleasă de-abia în sec. XVIII, o dată cu introducerea metodelor algebrice noi de cercetare a geometriei.

Cvadratura cercului este a treia problemă imposibil de rezolvat cu rigla și compasul. E vorba de construit latura patratului a cărui arie să fie exact egală cu a unui cerc dat. Imposibilitatea cvadraturii cercului cu rigla și compasul a fost stabilită abia acum 90 de ani.

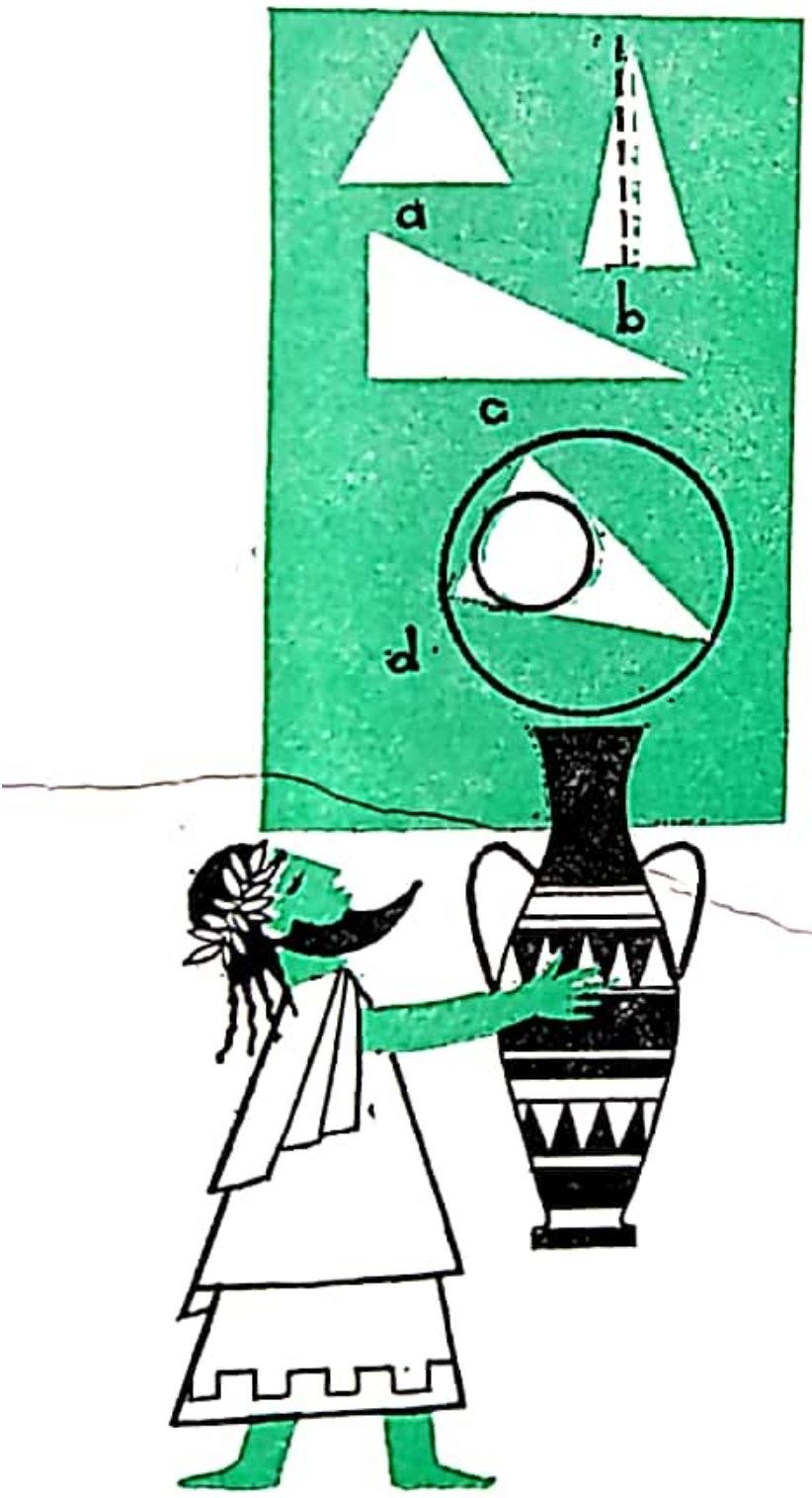
Nici o problemă nu a pasionat pe geometrii greci așa de mult ca aceasta. Încă din Școala lui Pitagora s-a încercat să i se găsească o soluție,dar rezultatele nu se mai cunosc. Se spune că și Anaxagora din Clazomene ar fi scris o carte despre cvadratura cercului, în timpul petrecut de el în închisoare, căci, deși prieten cu Pericle, atenienii l-au condamnat la închisoare pentru impietate. Anume, fiindcă, la cursurile sale de astronomie el susținea că Soarele este o mare piatră incandescentă, iar Luna nu are lumină proprie, ci o reflectă pe aceea a Soarelui! Nu se știe cum a re-

zolvat Anaxagora această problemă, căci nici cartea lui nu mai există. În schimb, ne-au rămas alte soluții, propuse de Hipocrat din Chios, de Dinostrat, fratele lui Menechmus, de Antifon, de Bryson din Heracleea și de alții. Dacă nu putem discuta toate soluțiile *mecanice* găsite de acești învățați, să ne oprim la aceea propusă de Antifon, căci dovedește intuiție geometrică. Antifon a considerat un triunghi echilateral înscris în cerc și i-a dublat în mod succesiv numărul laturilor, din 3 în 6, din 6 în 12 și așa mai departe. În felul acesta, afirma Antifon, laturile se înmulțesc și devin așa de mici încît poligonul se confundă cu cercul. *Așadar, la urma urmei, cercul este un poligon și cum orice poligon se poate transforma într-un patrat, înseamnă* că se poate face cvadratura cercului.

Procedeul imaginat de Antifon este acela ce se folosește azi în mod obișnuit. Însă, pe vremea aceea, el a fost aspru criticat și respins ca fiind un sofism. Discuțiile aprinse care au avut loc atunci se găsesc semnalate în *Fizica* lui Aristotel. Aflăm de acolo de ce raționamentul lui Antifon era privit ca un sofism care nici nu merita să fie luat în considerație, fiindcă, matematicienii de atunci susțineau că o linie dreaptă nu e formată din puncte, ci, oricît de mică ar deveni, ea rămîne linie dreaptă, adică păstrează cele două extremități și deci poligonul înscris nu se poate transforma într-un cerc, căci laturile lui, oricît de mici ar fi ele, taie cercul mereu în două puncte. Nu numai Aristotel și discipolii lui erau de această părere, dar însuși Protagora, considerat ca sofist, susținea că tangenta la cerc nu poate atinge cercul numai într-un punct, ci cel puțin în două. E clar că atîta vreme cît nu exista o concepție unitară asupra unei noțiuni fundamentale, cum este aceea de dreaptă, geometria nu se putea transforma într-o știință. Dar lăsînd la o partea aceste subtilități ce aveau să se rezolve în viitor, geometrii greci au continuat să cerceteze proprietățile liniilor frînte și ale celor curbe și să se bucure de rezultatele obținute.

Triunghiuri

Deși se spune că este cel mai simplu poligon, despre triunghi s-au scris cărți întregi. A avut și are un farmec nespus prin care a atras și atrage pe matematicienii de pretutindeni și dintotdeauna. Thales l-a întruchipat dintr-o umbră și un băț ca să afle înălțimea piramidei lui Keops, stîrnind astfel mirarea faraonului, pe atunci învățatul învățaților. Pitagora i-a smuls o taină de care omenirea nu se va putea lipsi și care rămîne mereu prezentă în studiul teoretic sau în aplicații practice. Cel mai simplu poligon se prezintă totuși în patru forme diferite. Triunghiul echilateral (a), avînd toate laturile și unghiurile egale,



este un poligon regulat. Această regularitate a formei evocă sentimentul de armonie, de echilibru și de frumos. Și triunghiul isoscel (b) are un farmec deosebit, care emană din simetria lui față de înălțime. A fost folosit adesea ca figură de ornament pe vasele antice grecești unde un șir de triunghiuri negre, cu vîrfurile în sus, se întrepătrund cu un al doilea șir de triunghiuri isoscele albe, cu vîrfurile în jos, într-o repetare a elementului de simetrie. În adevăr, dacă ne-am închipui că înălțimea ar fi o oglindă, o jumătate de triunghi s-ar reflecta întocmai în cealaltă. Meritul geometriei este că poate exprima, printr-o noțiune precisă, ca aceea de simetrie, una dintre tainele frumuseții. Despre triunghiul dreptunghic (c), maiestos prin canonul care obligă un patrat — cel construit pe ipotenuză — să nu fie nici mai mare, nici mai mic decît suma patratelor care au catetele drept laturi, se vor afla multe proprietăți în decursul anilor de școală. El va fi ca un tovarăș nedespărțit de toți acei se se vor hotărî să devină constructori oriunde și în orice domeniu. A mai rămas triunghiul oarecare, banalul triunghi oarecare, care din modestie numai nu-și țipă calitățile, deși are o mulțime. De pildă, că prin vîrfurile lui

trece un cerc și numai unul singur, iar, cu laturile lui, el atinge un alt cerc, protejîndu-l.

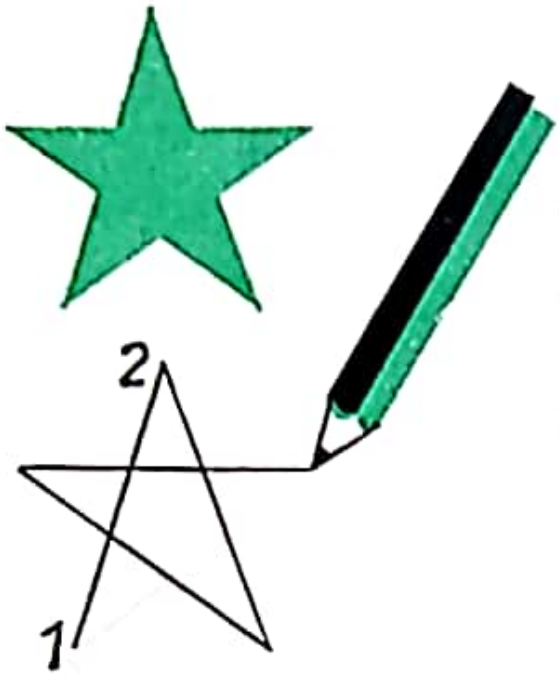
Patrulatere

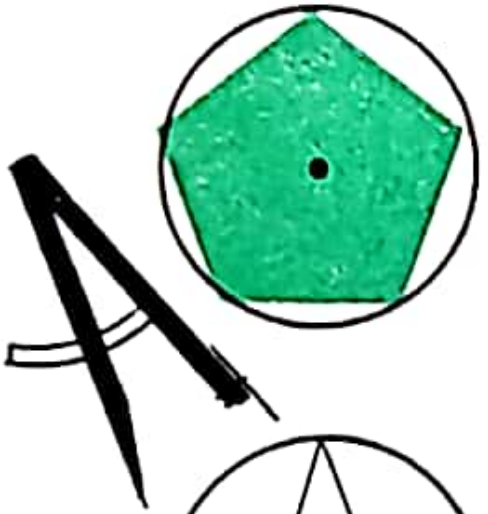
Spre deosebire de triunghiuri, care sînt figuri plane, adică au laturile lor situate totdeauna în același plan, patrulaterele pot fi figuri *plane* sau *strîmbe*. *Plane*, dacă cele patru laturi se află pe același plan sau *strîmbe*, dacă două laturi sînt într-un plan, iar celelalte două în alt plan, ca de exemplu, pe cele două tartaje ale unei cărți întredeschise. Și patrulaterele, mai ales *patratele*, *dreptunghiurile*, *romburile*, *paralelogramele* și *trapezele* servesc mult drept figuri de ornamentație în arhitectură, în decorații interioare etc. De pildă, plăcile de faianță, dalele de piatră, bucățile de parchet din lemn sau mozaic, așezate în diverse combinații, nu sînt decît diverse forme ale acestor poligoane . Dar unde nu se întîlnesc patrulaterele? Ferestrele, ușile, pereții încăperilor, ramele de la tablouri, fețele de masă etc. nu sînt, de cele mai multe ori, dreptunghiuri sau patrate?

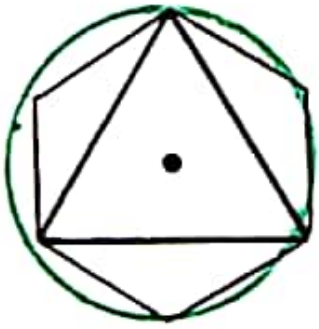
Triunghiurile ca și patrulaterele au preocupat prin proprietățile lor pe geometrii greci. În particular, teoremele legate de asemănarea figurilor au condus la dezvoltarea, de către Eudoxus, a *teoriei proporțiilor*, unul dintre cele mai importante capitole ale geometriei, iar rezultatele stabilite de ei în legătură cu calcularea ariilor au sugerat și problema cvadraturii cercului. Aceasta se afirmă în următorul comentariu al lui Proclus: *o consecință a acestei probleme este că vechii greci au fost conduși să caute cvadratura cercului. Fiindcă dacă putem afla un paralelogram egal cu orice figură plană merită să se cerceteze dacă nu este posibil să se afle o figură rectilinie egală cu una circulară.*

Pentagoane

Dintre poligoanele cu cinci laturi, pentagonul regulat stelat, care se mai numește și *pentagramă* împodobește stema țării noastre și e semn de recunoaștere a fabricilor, uzinelor și tuturor lăcașurilor unde munca are loc de cinste. Cu vreo 500 de ani î.e.n. pentagrama fusese aleasă, tot ca semn



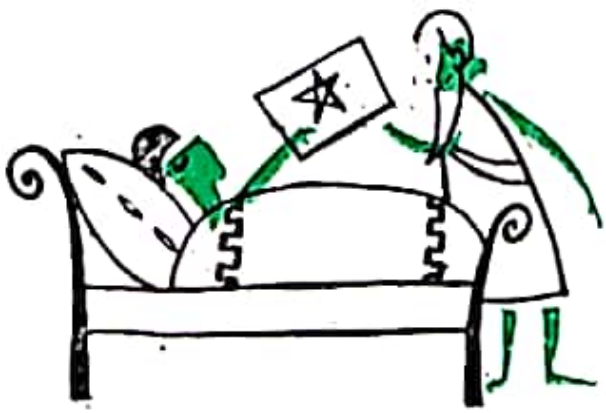




de recunoaștere, al acelora ce făceau parte din Școala lui Pitagora. Pentagrama se poate desena printr-o singură trăsătură de creion, fără să se treacă de două ori peste aceeași linie. De pildă, să zicem că se începe de la punctul 1, se continuă cu 2 ș.a.m.d. Figura reprezintă un pentagon regulat convex. După cum se știe, prin vîrfurile oricărui poligon regulat trece un cerc. Se spune că poligonul regulat se poate înscrie într-un cerc. Pentru aceasta e deajuns să împărțim cercul în 5 părți egale și apoi să unim punctele de diviziune. Numai că, împărțirea cercului în 5 părți egale nu-i o treabă toc-

mai simplă și de aceea, cu vreo 500 de ani în urmă, pictorii care știau cum să împartă cercul, cu o aceeași deschizătură de compas, în cinci părți egale, păstrau aceasta ca pe un mare secret.

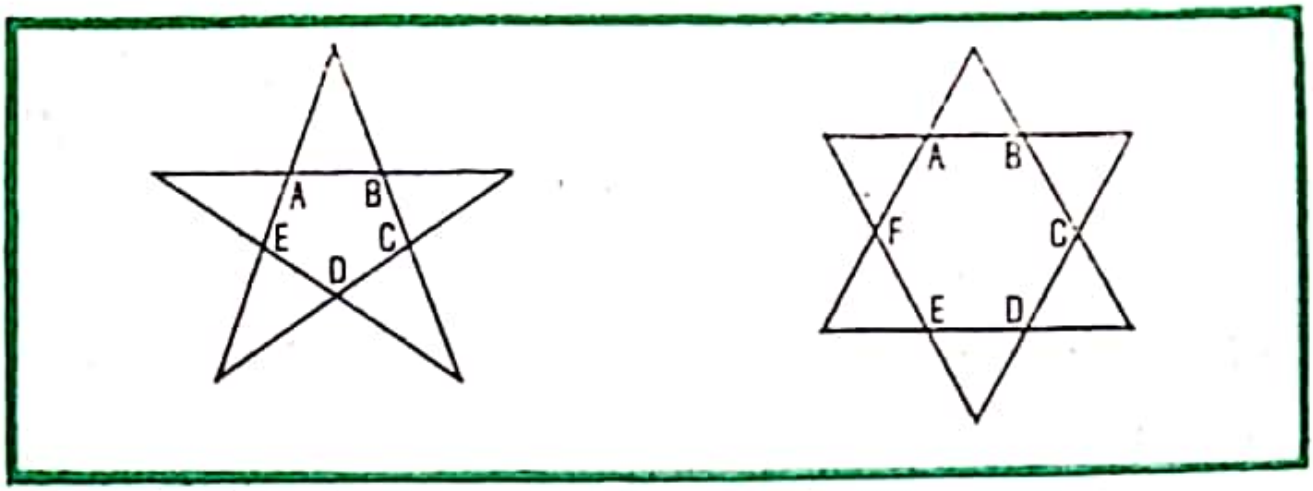
Această problemă interesa mult pe pictori, căci prin armonioasa lui înfățișare pentagonul regulat intervenea adesea în problemele de compoziție ale unui tablou. Este interesantă următoarea proprietate a pentagonului regulat: dacă se unesc vîrfurile lui, din două în două, atunci se formează o pentagramă, iar în interiorul ei, un nou pentagon simplu, din care, repetînd procedeul, se poate obține iar o pentagramă și așa mai departe. Această succesiune de pentagoane alternînd cu pentagrame se poate continua, în minte, la nesfîrșit. Proprietatea este caracteristică pentagonului și nu se întîlnește la hexagon, unde, unind vîrfurile din două în două, se obține *triunghiul echilateral.*



Cei mai mulți dintre pitagoreici, adică dintre cei ce aparțineau de Școala lui Pitagora, trăiau la un loc, avînd toate bunurile în comun. Simbolul de recunoaștere era pentagrama. Se povestește că o dată, în timpul unei călătorii, un pitagoreic s-a îmbolnăvit și a poposit într-un han. Hangiul i-a dat de mîncare și l-a îngrijit. Simțind că va muri, el a cerut hangiului o tăbliță, a desenat pe ea pentagrama și l-a rugat să o pună undeva la vedere căci într-o zi îi va fi răsplătită omenia. Într-adevăr după un timp, cineva văzînd semnul, a întrebat pe hangiu de unde îl are și aflînd povestea, a achitat datoria tovarășului care murise acolo.

Poligoane regulate stelate

Lăsînd la o parte triunghiul și patratul, există unele dintre celelalte poligoane regulate convexe care pot forma poligoane regulate stelate. În acest scop se folosește aceeași metodă prin care s-a obținut pentagrama din pentagonul regulat convex, anume se duc diagonalele lui. Dar mai există și o altă metodă, fiindcă pentagrama din figură poate fi privită ca provenind din pentagonul convex ABCDE în care s-au prelungit laturile lui din trei în trei: intersecția laturilor BC și ED determină un vîrf, iar laturile AE și CD, alt vîrf etc. Aplicînd această metodă și hexagonului convex ABCDEF, poligonul obținut



pare *stelat*, în realitate nu este un poligon stelat pentru că figura nu se poate desena printr-o trăsătură continuă de condei, așa cum se desenează pentagrama. Figura obținută, numită *hexagramă*, este formată de fapt prin întretăierea a două triunghiuri. Să reținem că a fost vorba de un poligon cu un număr pereche de laturi, căci faptul se va repeta în toate cazurile asemănătoare. Din contra, heptagonul regulat convex, poligon ce are 7 laturi, dă naștere la două poligoane stelate diferite, după cum se prelungesc laturile din două în două sau din trei în trei.

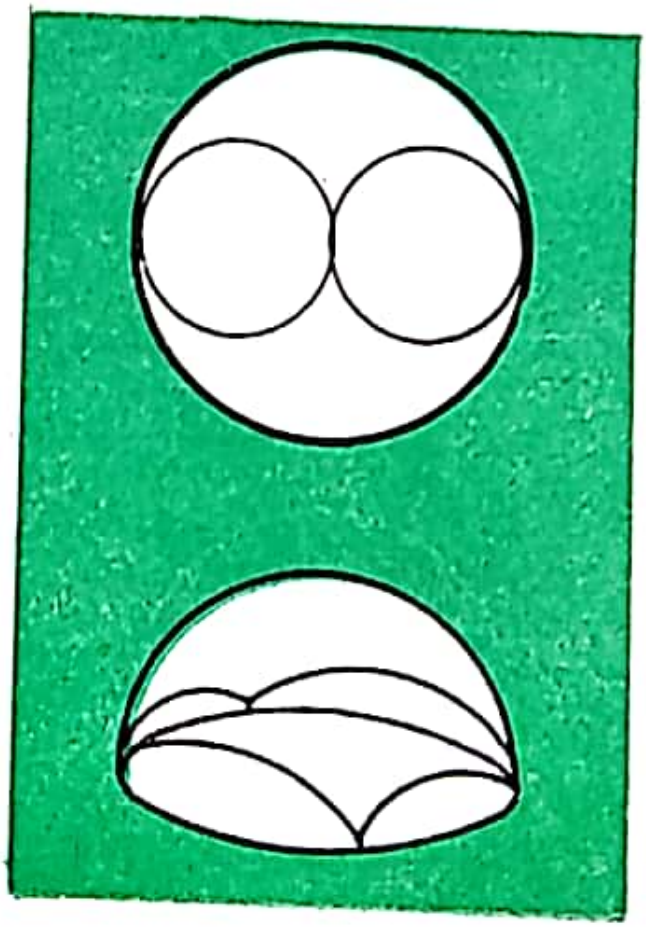
Linii curbe

De cînd a început să privească în jurul lui, omul a întîlnit liniile curbe. În forma orizontului, a lunii, a soarelui a văzut cercul, pe cochiliile mel-

cilor sau în mugurii de ferigă a văzut spirale şi helice, prin căderea unei pietre aruncate pieziş a cunoscut parabola. La început, le-a desenat şi, şi-a făcut din conturul frunzelor sau al florilor modelele motivelor de podoabă. Mai tîrziu, geometrii greci au căutat să afle tainele acestor linii şi le-au descoperit proprietăţile. Au stabilit, ca şi în cazul poligoanelor, că unele curbe sînt *plane*, aşa cum este *cercul* sau *parabola*, iar altele sînt *strîmbe*, aşa cum este *helicea*, cunoscută întîi din cîrceii plantelor agăţătoare şi mai tîrziu, prin marginea şuruburilor.

Privind drumul descris de o piatră aruncată în aer sau acela al păsărilor în zbor, linia curbă a putut fi închipuită ca luînd naştere din *mişcarea unui punct* după o anumită lege. De aceea s-au şi cercetat proprietăţile pe care le-ar putea avea punctele unei anumite curbe. De pildă, s-a stabilit că cercul are toate punctele lui la aceeaşi depărtare de un punct fix. Această proprietate a fost apoi folosită ca definiţia cercului, spunîndu-se că: *cercul este locul geometric al punctelor care sînt*

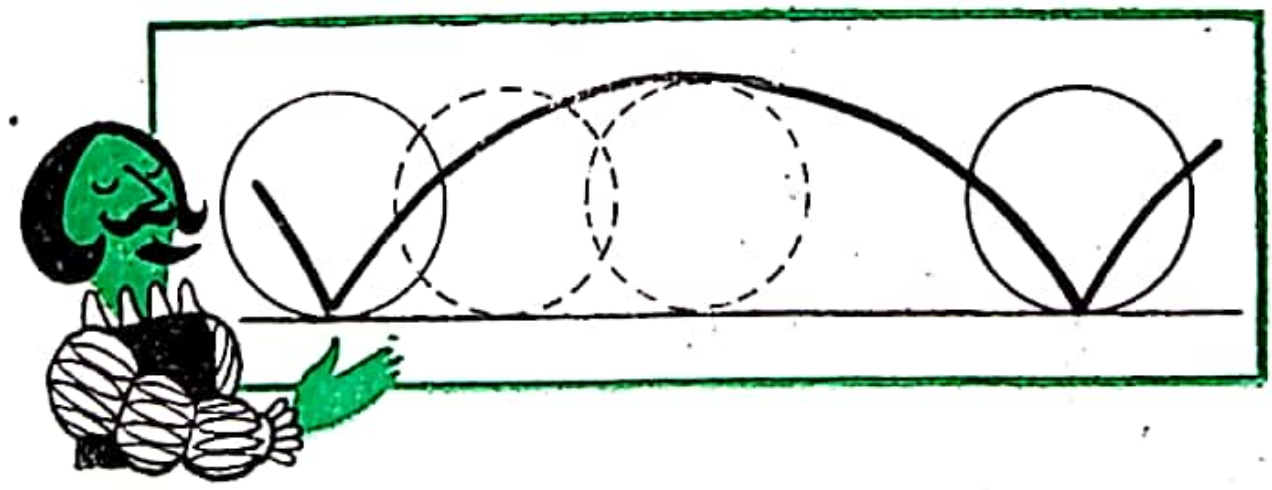
egal depărtate de un punct fix, numit centru. Grecii au mai descoperit și alte curbe care se pot defini tot ca locuri geometrice, de pildă *cicloida*. Dar, mai înainte de a o discuta, să observăm în continuare, că o curbă poate fi privită și altfel decît generată de un punct în mișcare, și anume, prin intersecția a două suprafețe. Un exemplu apropiat ar fi o sferă tăiată de un cilindru, sau de un con sau de un plan. În ultimul caz, curba de secțiune este plană — un cerc — ea trebuind să se afle pe sferă și totodată în *planul de secțiune*. În celelalte două cazuri, însă, curba de secțiune este *strîmbă*. Curba de intersecție a unei sfere cu un cilindru — mai bine zis cu doi cilin-



dri, care au fiecare ca diametru raza sferei — este cunoscută azi sub numele de *Fereastra lui Viviani.* Această curbă se consideră ca redescoperită, în secolul al XVII-lea, de matematicianul italian Vincenzo Viviani, căci, se pare că a fost cunoscută și în antichitate. Ea se prezintă ca un caz particular al curbei studiată de Eudoxus și numită de el *hipopedă.* A fost numită fereastra lui Viviani, fiindcă Viviani a arătat că are aplicații în arhitectură, ea fiind conturul *ferestrelor* unei cupole de formă emisferică.

Cicloida

Iată o curbă care se bucură de un înalt prestigiu, nu numai în geometrie, dar și în mecanică, fizică, astronomie, și tehnică, datorat probabil



modului simplu de a fi descrisă de către un punct care se află pe un cerc în mișcare. Și iată cum:

Fie un cerc și o dreaptă pe care el se rostogolește fără să alunece. Pe cerc alegem un punct fix, să zicem acela ce se află și pe dreaptă cînd cercul a început să se rostogolească. Continuîndu-și mișcarea punctul fix se urcă și va atinge locul cel mai înalt. Prin rostogolirea cercului, punctul coboară pînă cînd întîlnește iar dreapta. Astfel s-a născut prin mișcarea continuă a punctului *o buclă* a unei curbe care nu se închide, ci se va continua atît cît se va rostogoli și cercul. Cu mintea, ne-o putem închipui desfășurîndu-și buclele unele după altele spre infinit. Această curbă a fost cunoscută din antichitate și redescoperită de matematicienii din veacul al XV-lea. De atunci a fost studiată de mulți, iar proprietățile, care s-a dovedit că le are, au făcut din ea una dintre curbele cele mai renumite. În secolul al XVI-lea Galileo Galilei i-a dat numele de *cicloidă*, amintind astfel originea ei. Tot Galileo a arătat că ea poate fi aplicată în construirea podurilor. Azi, cînd se folosește betonul armat, arcele de cicloidă nu lipsesc din construcția viaductelor. Matematicienii francezi au numit-o

Numele lui *Galileo Galilei* (1564—1642) este legat de transformarea astronomiei într-o știință modernă, fapt ce s-a putut realiza atît prin construirea și folosirea lunetei ca instrument de cercetare a cerului, cît și prin susținerea ipotezei că pămîntul se rotește în jurul soarelui și nu invers, cum se admitea pînă atunci. Galilei a contribuit totodată și la dezvoltarea științei în forma modernă prin faptul că a aplicat matematicile ca mijloc de cercetare a fenomenelor fizice. *Cartea naturii* — a spus el — *este scrisă în limbaj matematic.*

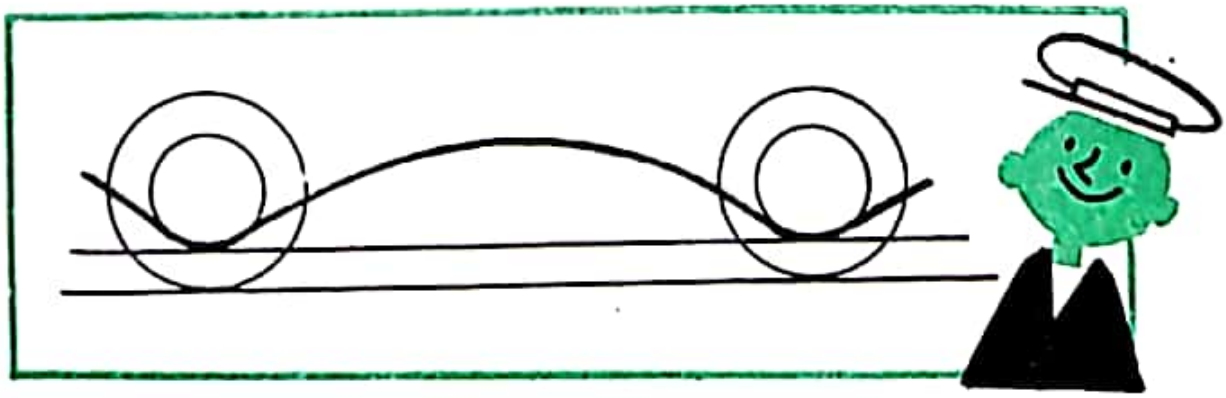
ruletă, așa că în literatura matematică modernă, această curbă se întîlnește sub ambele numiri. Cicloida are multe aplicații atît în probleme de natură teoretică, cît și în tehnică, ca de pildă, la construirea pendulului, a roților dințate sau în artă.

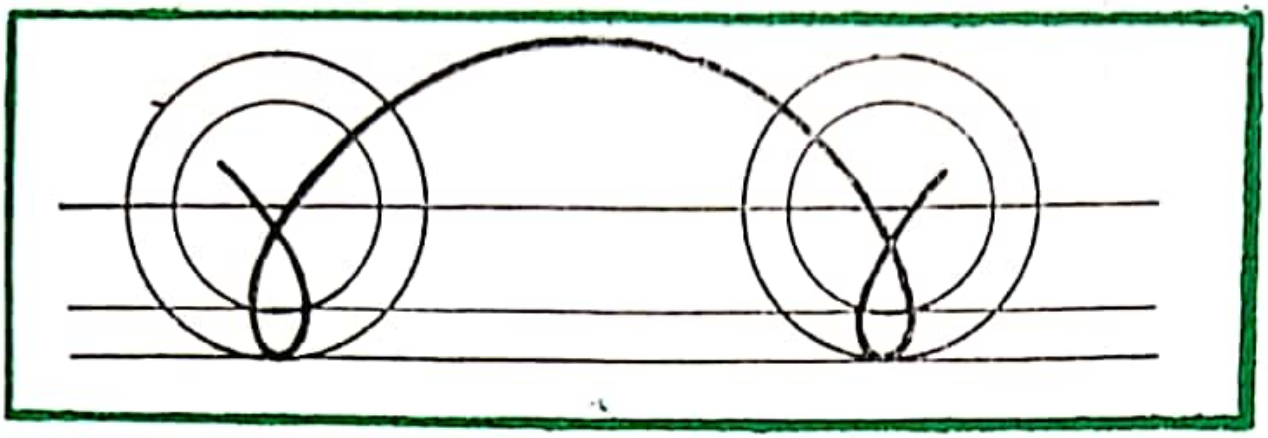
De istoria cicloidei este strîns legat numele lui *Blaise Pascal* (1623—1662). Acest renumit matematician și filozof suferea de insomnie și de cumplite dureri de dinți. Într-o noapte din anul 1658, ca să uite de dureri s-a gîndit să se ocupe de cicloidă. Și în adevăr gîndind la cicloidă, durerile au dispărut și nici nu a știut cînd s-a făcut ziuă. Surprins de rezultatele frumoase pe care le-a obținut

el a continuat să lucreze neîntrerupt, timp de 8 zile. Cînd a publicat proprietăţile descoperite atunci, el le-a adresat celorlalţi matematicieni, aşa se proceda pe atunci, sub formă de provocare. La această provocare, cei vizaţi au răspuns cu alte proprietăţi ale cicloidei, şi duelul matematic s-a continuat pînă ce au fost epuizate toate mijloacele de cercetare care conduceau la rezultate noi. Din această cauză, cicloida a fost numită şi *Elena geometriei*, asemănîndu-se acest război matematic cu războiul troian provocat de frumoasa Elena.

Alte cicloide

Dacă ne-am închipui că cercul pe care se află punctul ar fi desenat pe un disc de lemn sau de carton și că acest disc se rostogolește, atunci, o dată cu cicloida descrisă de punctul de pe cerc se nasc și alte cicloide, descrise de punctele ce se găsesc pe alte cercuri concentrice, atît în interiorul cît și în exteriorul cercului considerat. Astfel, dacă un



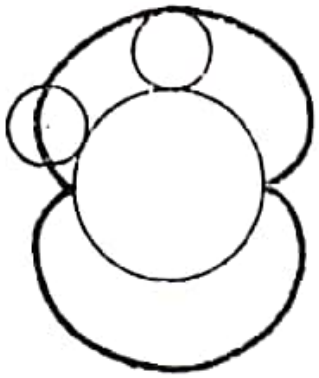


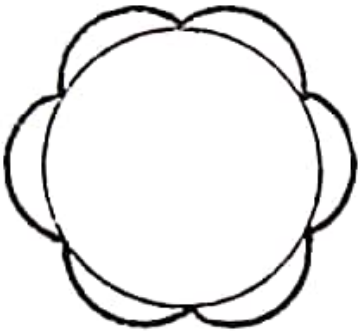
punct este în interiorul cercului curba descrisă de el are forma din figura alăturată și se numește *cicloidă scurtată*. Să observăm că punctul se află pe un cerc concentric cu cel dat, dar mai mic decît el. Ori, cînd discul se rostogolește, acest punct are de parcurs un drum mai scurt decît punctul de pe cercul inițial și ca să poată ține pasul cu el cercul mai mic, nu se mai rostogolește *fără alunecare* ci, o dată cu rostogolirea, are și o mișcare de alunecare. Aceasta explică și forma și numele acestei noi curbe. Același lucru se întîmplă cu un punct care se află pe un cerc concentric, dar mai mare decît cercul prim. Urma lăsată de punct în timpul rostogolirii cercului se numește *cicloidă alungită*. În forma acestei curbe apar niște bucle mai mari sau mai mici, după cum este și depărtarea punctului de primul punct. Aceste noi bucle ce se înnoadă de primele se datorează

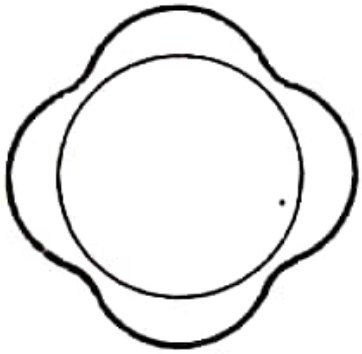
unei *alunecări înapoi* a cercului de rază mai mare, astfel ca în timpul rostogolirii discului acest punct să poată ține pasul cu celălalt.

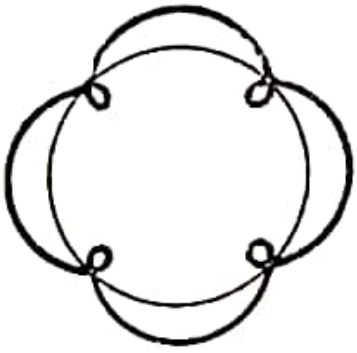
Epicicloide

Cicloidele descrise au fost generate de puncte aflate pe un cerc ce s-a rostogolit pe o dreaptă, cu sau fără alunecare. Dacă am admite că cercul se rostogolește, fără alunecare, pe un alt cerc atunci curba obținută se numește *epicicloidă*. Dar, în acest caz, dreapta de lungime nedefinită este înlocuită cu un cerc a cărui lungime este fixă și deci, rostogolirea cercului este limitată. Rezultă de aici că, deși generată în același mod ca și cicloida, forma curbei nou născute depinde de mărimea celor două cercuri. Ea se numește *epicicloidă*, cuvîntul grecesc „epi“ înseamnă „pe“, așadar o *curbă pe cerc*. În figură avem o epicicloidă cu *două bucle*, și o epicicloidă cu șase bucle. Iată și două epicicloide cu patru bucle, una scurtată și alta alungită. Deosebit de frumoase sînt însă epicicloidele născute de un cerc a cărui rază nu se cuprinde de un număr întreg de ori





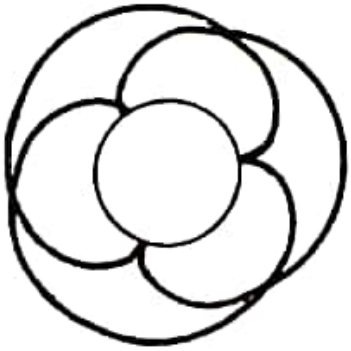


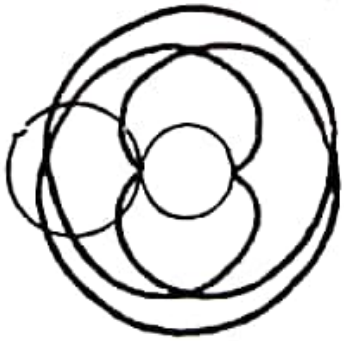


în raza cercului pe care se rostogolește. În acest caz, neajungînd la punctul de pornire, el se rostogolește în continuare de mai multe ori pe cercul fix și buclele pe care le formează se întretaie între ele. De pildă epicicloidele din figură. Epicicloida din capăt are formă de *inimă* și se mai numește și *cardioidă*. Ea a provenit din rostogolirea fără alunecare a unui cerc pe altul de aceeași rază.

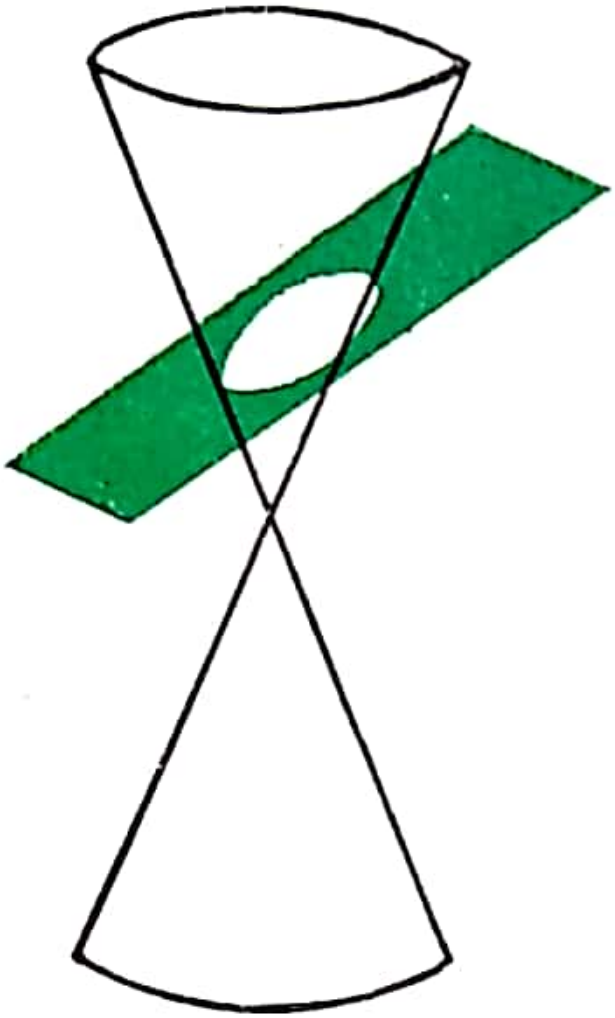
Secțiuni conice

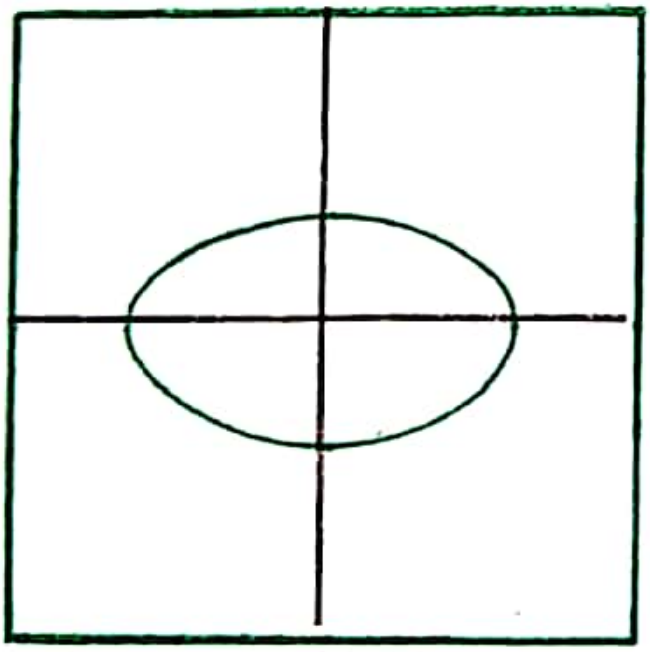
În veacul al IV-lea î.e.n. matematicienii greci Eudoxus, Menechmus și Aristeu au descoperit și au





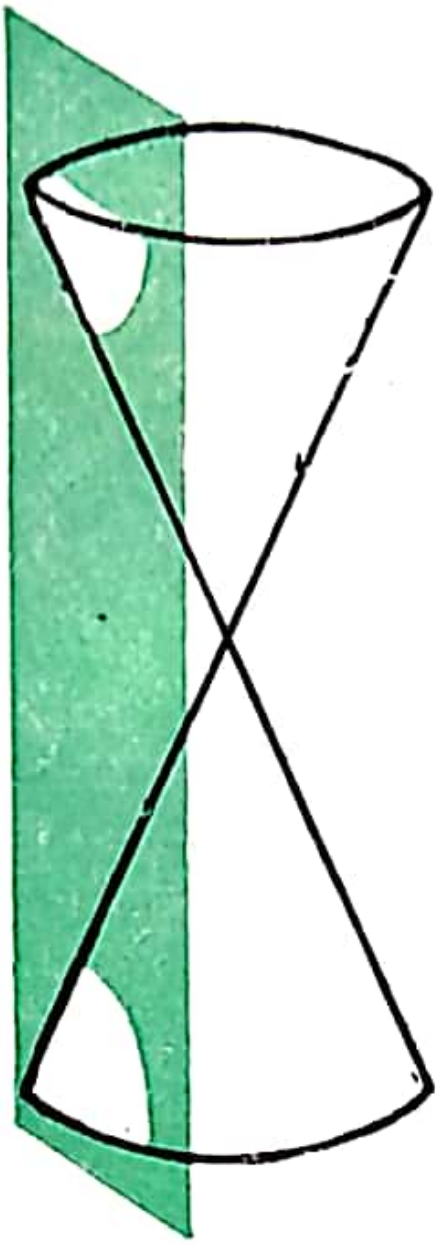
cercetat proprietățile unor curbe pe care le-au obținut prin secțiunea unui con circular drept cu un plan. Se poate că Eudoxus să fi ajuns la cunoașterea acestor curbe prin legătura lor cu problema determinării orei. Se știe că pe atunci nu existau ceasuri, nici pendule, că singurul mijloc de a afla cît e ceasul era să ai un cadran solar. Fiecare a văzut cum arată un cadran solar. Azi, el se păstrează numai din curiozitate și dă farmec multor ziduri ale monumentelor noastre vechi. Un cadran solar este format dintr-un băț înfipt într-un zid vertical, paralel cu axa polilor pămînești, iar umbra lui cade pe niște diviziuni care arată ora. Ca să poată stabili corespondența dintre poziția umbrei și ora respectivă, Eudoxus a trebuit să cerceteze proprietățile curbelor ce se obțin dacă se taie un con cu un plan. Elevii lui, Menechmus și Aristeu, au descoperit că aceste curbe pot fi folosite ca să determine o soluție și în problema duplicării cubului. Mai tîrziu, au fost numite: *elipsă*, *hiperbolă* și *parabolă*. Deși deosebite la înfățișare, ele aveau și un nume comun, acela de *conice*, fiindcă toate trei au fost obținute prin tăierea unui con circular drept cu un anumit plan. *Conul circular drept* este cunoscut; ori de

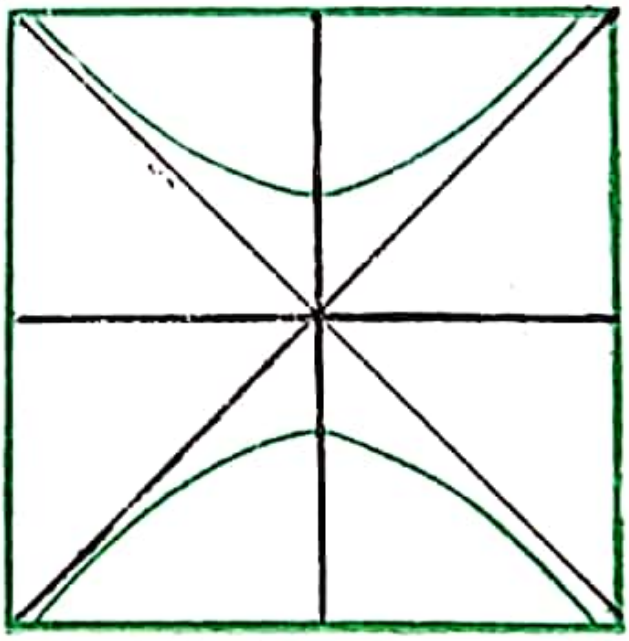


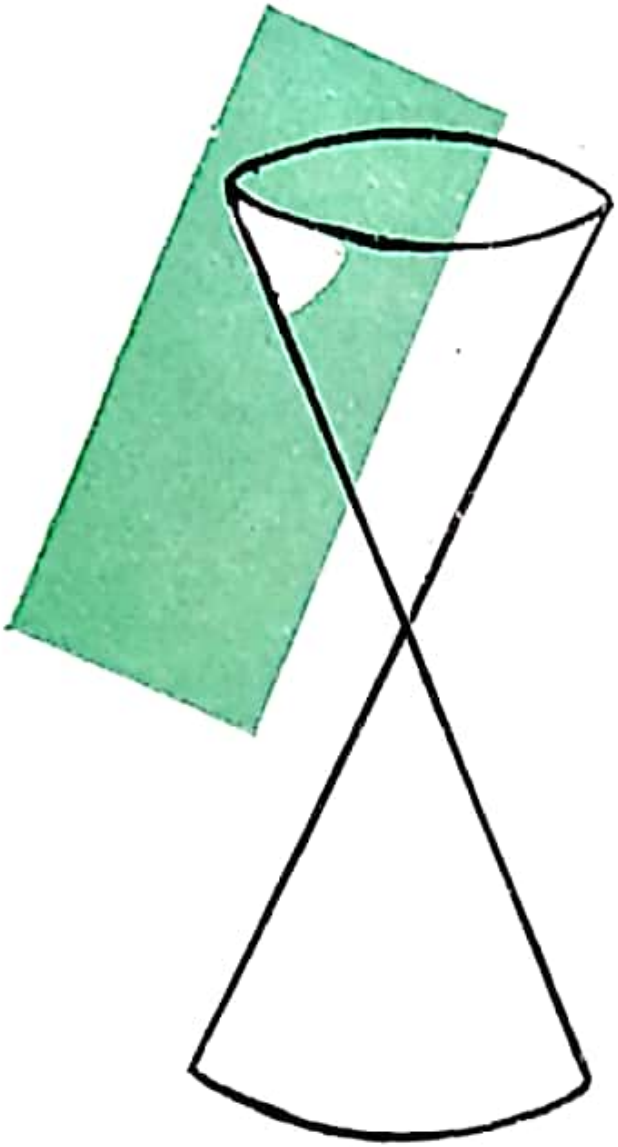


cîte ori învîrtim o foaie de hîrtie ca să facem un cornet, căpătăm acest con. Dar poate nu oricine știe că în geometrie conul nu se consideră ca avînd o singură pînză, adică oprindu-se la vîrful lui, ci că el mai are încă o pînză la fel cu prima, fiindcă dreptele ce trec prin vîrful conului își continuă drumul lor într-o parte și în cealaltă a lui. Dacă se taie un asemenea con circular drept cu un plan P dus la întîmplare, tăietura obținută este o curbă închisă, ca un cerc alungit, și se numește *elipsă*. Grecii o numeau *curba scutului*.

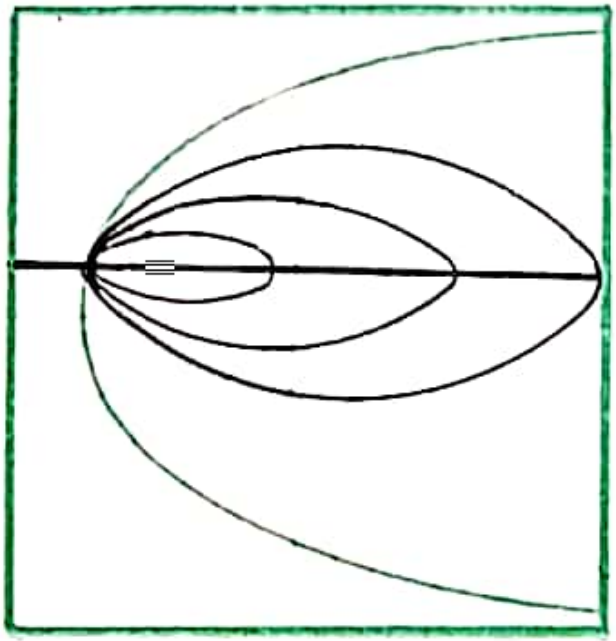
Rondurile dintr-un strat de flori, dacă nu au formă de cerc, au formă de elipsă. Feliile de franzelă sau de salam, tăiate piezîș sînt tot elipse. Geometrii greci nu s-au mulțumit să privească elipsa numai ca pe o curbă de secțiune, ei au căutat să descopere *legea*, care să arate ce fel de *loc geometric* este ea. Și au găsit că: *Elipsa este locul punctelor astfel că suma distanțelor lor la două puncte fixe numite focare, să rămînă neschimbată.* Această definiție are multă asemănare cu aceea a cercului. În cazul cercului era vorba de un singur punct fix, iar aici dintr-un punct







s-au făcut două, ca și cum am avea de-a face cu un cerc de gumă pe care l-am întinde de-o parte și de cealaltă parte a unui diametru în așa fel ca de o parte și de alta a centrului să apară cele două focare. Dacă planul de secțiune nu mai are o poziție oarecare, ci se duce *paralel cu axa conului*, atunci acest plan taie ambele pînze ale conului și fiindcă acestea sînt nelimitate, curba care se formează nu mai este închisă, ci deschisă și are două ramuri care se întind spre infinit. Ea se numește *hiperbolă*. Ca și elipsa, hiperbola are două focare și un centru și poate fi definită



ca un loc geometric. Dacă mai sucim planul, și îl orientăm în așa fel ca să devie paralel cu generatoarea conului, adică să nu poată tăia decît o singură pînză a lui, atunci secțiunea este o curbă ce se numește *parabolă*. De cîte ori nu ați auzit acest cuvînt, legat de diferite aplicații practice? Toate punțile suspendate au formă de parabolă și, în general, un fir legat de la cele două capete se înconvoaie ca o parabolă. Și parabola se poate defini ca un loc geometric. De altfel ea reprezintă forma pe care o ia elipsa, cînd unul dintre focarele ei se îndepărtează la infinit. Figura alăturată ne poate sugera cum se petrece fenomenul. O serie de elipse au un vîrf comun și un focar comun. Dacă al doilea vîrf se depărtează spre dreapta, o dată cu el se depărtează centrul și al doilea focar al elipsei. Atunci cînd distanța focală devine infinită, elipsa se transformă în parabolă. Cuvîntul parabolă atrage parcă imaginea oglinzii parabolice care, în formă de radiator, se află prin toate vitrinele cu articole electrice. Însă, amintind de oglinda parabolică, am ieșit din domeniul curbelor și am pășit în acela al suprafețelor, cu alte cuvinte am trecut de la geometria plană la *geometria în spațiu*. Am fi astfel tentați să continuăm an-

Studiul sistematic al conicelor a fost făcut de *Apollnius din Perga* (262—205 î.e.n.). Numele lui este legat de istoria matematicilor prin cele 8 cărți despre conice pe care le-a scris, în care se află aproape 400 de teoreme, cea mai mare parte descoperit chiar de el. Apollonius este acela care a numit aceste curbe, pentru prima oară, *elipsă*, *hiperbolă* și *parabolă*. Numirile au fost sugerate de anumite proprietăți ale lor. Pînă la el se credea că aceste curbe pot fi obținute numai prin secțiuni făcute în conuri diferite între ele ca deschidere și de aceea ele se numeau *„secțiuni ale conului ascuțit"* (elipsa) — *dreptunghiular* (parabola) sau *obtuz* (hiperbolă). El a stabilit definiția lor prin puncte, independent de originea lor inițială. Studiul secțiunilor conice stabilit de Apolloniu și de alți matematicieni greci, printre care Euclid și Arhimede, a fost de mare ajutor în problemele de astronomie modernă. Azi se consideră că *Apollonius* și *Kepler* au pregătit calea pentru marea descoperire a gravitației universale, făcută de Newton.

cheta, ca să vedem și cîteva dintre problemele asupra corpurilor solide ce au preocupat pe matematicienii greci dinainte de Euclid. Dar asemenea probleme, cu toate că nu le-au fost străine, nu le-au trezit aceeași curiozitate și același interes ca acelea legate de figurile plane. O remarcă de altfel și Platon, în dialogul intitulat *Republica: Ar fi natural ca, de la dimensiunea a doua, să se treacă la a treia, adică la corpurile care au înălțime. Dar, o, Socrate, se pare că această disciplină nu s-a dezvoltat încă.* De aceea, este mai co-

mod să relevăm contribuţiile din geometria în spaţiu anterioare lui Euclid în chiar cadrul *Elementelor* lui.

Elementele lui Euclid

În anul 323 î.e.n. cînd Ptolomeu I Soter (adică Salvatorul) a înfiinţat Universitatea din Alexandria, l-a chemat pe Euclid ca profesor şi conducător al secţiei de matematici. Euclid se afla pe atunci la Atena, unde îşi cîştigase faima de matematician renumit. El a venit în Alexandria şi aici a trăit pînă la sfîrşitul vieţii, ţinînd cursuri de matematici şi publicîndu-şi lucrările, dintre care *Elementele* reprezintă una dintre cele mai importante opere din istoria matematicilor. Opere denumite *Elemente* au fost scrise şi mai înainte de Euclid. Aflîndu-se în Atena, Euclid a cunoscut aceste lucrări şi chiar le-a folosit în expunerea sa. Aceasta însă nu i-a influenţat caracterul căci, dintre toţi geometrii greci care au încercat să adune la un loc adevărurile geometrice stabilite pînă la ei, singura culegere reuşită a fost aceea a lui Euclid. De ce? Pentru că, spre deosebire

Devenind rege al Egiptului, în anul 323 î.e.n. *Ptolomeu I* și-a ales drept capitală orașul Alexandria. Aici el a întemeiat două grandioase instituții de cultură: *Universitatea*, numită *Muzeul* (în greceşte cuvîntul „muzeion" înseamnă „în cinstea zeilor") și *Biblioteca*, legată de ea. Datorită grupului de oameni de litere și de științe care au fost invitați să lucreze aici, Muzeul și Biblioteca din Alexandria au căpătat o mare faimă în toată lumea civilizată de atunci. Muzeul a fost construit după modelul Liceului lui Aristotel, iar cărțile din vasta bibliotecă au fost aranjate *după alfabet* — adoptîndu-se astfel metoda imaginată tot de Aristotel cînd a hotărît să-și pună în ordine biblioteca sa personală.

de cei ce au mai scris *Elemente*, Euclid nu a intenționat să compună o enciclopedie matematică care să cuprindă toate descoperirile matematice făcute pînă la el, ci s-a străduit să le prezinte într-o concepție unitară și logică. El a vrut să stabilească o metodă de inițiere în geometrie și să dea celor ce doresc să o studieze un instrument de cercetare de care să se folosească ca să poată realiza noi descoperiri. În acest scop el a căutat ca adevărurile matematice să se poată urma, unele după altele, adică să se poată deduce unele din altele în mod logic și ușor de înțeles. Astfel a prelucrat toate raționamentele ce urma să le expună, după o schemă, arătată odinioară de Aristotel, care

cuprindea, de obicei, următoarele etape: formularea generală a problemei, desenarea figurii din care să apară în mod concret datele problemei, exprimarea clară a datelor cunoscute (ipoteza) și a acelor ce trebuiesc dovedite (concluzia), construcții ajutătoare care să ajute demonstrarea, demonstrația, formularea concluziei care să se arate independentă de figura folosită. Ca instrumente pentru construcțiile grafice Euclid nu a

Despre viața lui *Euclid* nu s-au păstrat nici un fel de date, de aceea se spune că viața lui se confundă cu opera. Dar nici aceasta nu s-a păstrat în întregime. În afară de *Elemente* au mai rămas cîteva cărți dintre care amintim aici *Datele*, lucrare ce cuprinde teoreme și probleme care completează *Elementele* și *Optica*, privită ca o geometrie a „razei vizuale". Într-o anecdotă, scrisă după 800 de ani de la moartea sa, se povestește că Ptolomeu l-ar fi rugat pe Euclid să-i arate o cale mai ușoară ca să înțeleagă geometria, iar Euclid ar fi răspuns: *În geometrie nu există drumuri speciale pentru regi.*

folosit altele decît linia și compasul. Prin aceste mijloace Euclid a izbutit să dea geometriei o înfățișare nouă, aceea de *știință*.

Deși și-a intitulat lucrarea sa *Stoicheia* — cuvînt care în greșcește înseamnă *Elemente*, Euclid a dat acestui cuvînt un înțeles mai adînc. Anume, în sensul pe care îl foloseau filozofii de atunci, prin „elemente" se înțelegea „ceea ce rămîne", adică *elementele de bază cu ajutorul cărora se pot stabili toate celelalte adevăruri ale geometriei*. Euclid a început expunerea *Elementelor* prin definiții ce conțin enunțurile descriptive ale punctului, liniei, suprafeței etc. și prin recunoașterea unor adevăruri din natură, a căror existență părea așa de evidentă, încît nu mai avea nevoie de a fi demonstrate. Asemenea adevăruri au fost numite *postulate*, *axiome* sau *noțiuni comune*. De exemplu: *din orice punct se poate duce o dreaptă la orice punct*, sau: *din orice centru, cu orice distanță, se poate descrie un cerc* sau: *două mărimi egale cu a treia sînt egale între ele etc.* Bazîndu-se pe definiții și pe axiome, Euclid a arătat cum s-au putut deduce, prin demonstrații logice și trecînd de la simplu la compus, toate adevărurile geometrice mai greu de văzut dintr-o dată, adevăruri care au fost numite *teoreme*.

În *Elementele* lui Euclid se simte grija autorului ca stilul să fie cît mai clar şi precis. De aceea el a ales cu atenţie cuvintele şi acolo unde nu existau le-a creat, folosind cuvinte uzuale. Astfel cubul provine de la *kubos* — zar, *conul* de la *conos* — fructul pinului, *cilindru* de la *kylindros* — rulou, *prizma* de la *prisma* — bloc de lemn tăiat cu ferăstrăul, *sfera* de la *sfera* — minge, *paralele* de la *parallelos* — linie care aleargă de-a lungul alteia, *romb* de la *rombos* — sfîrlează etc.

Atunci cînd se spune că rigla şi compasul sînt singurele instrumente admise pentru construcţia figurilor, aşa cum se întîmplă în cazul *Elementelor*, rigla este folosită numai pentru a se uni două puncte sau pentru a se prelungi o dreaptă şi niciodată pentru a *măsura* o distanţă. Cu alte cuvinte, se presupune că *rigla nu este gradată*. De asemeni nici cu compasul nu se admite a se măsura vreo distanţă şi nici a se transporta vreo lungime. Compasul trebuie folosit numai ca să se descrie cercuri sau arce de cerc. De altfel în *Elementele* lui Euclid nu se găsesc probleme în care să fie vorba de evaluări numerice şi nu sînt date formule după care să se poată calcula ariile sau volumele corpurilor. Asemenea probleme se găseau explicate în anumite cărţi de geometrie practică.

Elementele sînt formate din 13 cărţi originale, la acestea s-au adăugat însă mai tîrziu alte două cărţi, care nu au fost scrise de Euclid. Prin ele-

ganța stilului și prin ordinea logică în care sînt expuse teoremele, vreo 500 la număr, această operă stîrnește și azi în sufletul celor ce o citesc un sentiment de puternică admirație și uimire. *Elementele* au fost traduse în peste 300 de limbi. În românește, traducerea a fost făcută, după

În veacul al XVI-lea și chiar la începutul celui de-al XVII-lea geometria era considerată ca unul dintre obiectele foarte grele și se studia numai la anumite Universități. Astfel, la Universitatea din Oxford prima catedră de geometrie care urma să înceapă studiul Elementelor lui Euclid s-a înființat abia în 1619. De aceea, pe cînd era student, filozoful englez Thomas Hobbes (1588—1679) nu învățase geometria și nici nu bănuia că ar exista o asemenea știință. Abia cînd era de 40 de ani, fiind la Paris, a găsit pe masa din biblioteca unui prieten *Elementele* lui Euclid, deschise la teorema 17 din cartea I. Curios, a început să o citească și după ce a văzut demonstrația, a rămas așa de entuziasmat de înlănțuirea logică a propozițiilor ce formau raționamentul încît a devenit un pătimaș admirator al geometriei. În una dintre cărțile lui de filozofie, scrise după această dată, el atacă cu multă înverșunare conducerea Universi-

tăților care nu au introdus această știință printre obiectele de studi.. Mai mult chiar, el devine apoi un *cvadraturist* așa de pătimaș că a neglijat chiar filozofia. Dar susținînd posibilitatea cvadraturii cercului cu rigla și compasul și-a creat mulți dușmani, printre matematicienii care doreau să-i arate că raționamentele lui erau *greșite!*

originalul grecesc, de către prof. Victor Marian (1896—1970) de la Universitatea din Cluj și publicată la București în 1939.

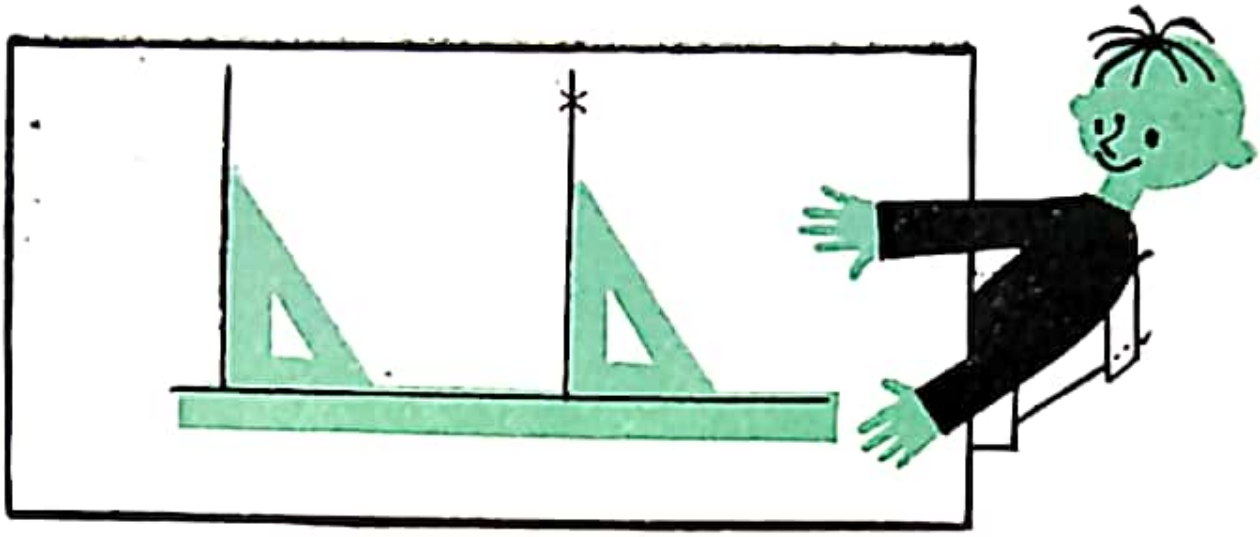
Drepte paralele

Elementele lui Euclid au atras atenția matematicienilor și asupra unor probleme cărora nu li se prea dăduse atenție pînă atunci. De pildă, asupra dreptelor paralele. Cu dreptele paralele grecii erau obișnuiți. Brazii cei înalți și drepți sau imaginea lor: coloanele, care nu lipseau din nici un templu, nu le lăsa impresia unei mulțimi de drepte paralele? De asemeni și urmele lăsate, mai ales cînd ploua, de roțile carelor. Numai că, de obicei, matematicienii de atunci își imaginau spațiul ca existînd atîta cît îl vedeau ei, cu alte cuvinte, atît

spațiu cît și liniile dinăuntrul lui erau privite ca *mărimi finite*. Se considera că există o sferă de cristal, pe care erau prinse toate stelele, dar nimeni nu se întreba ce era dincolo de această sferă... Ori, în definiția pe care o dă Euclid dreptelor paralele, intervin niște cuvinte care sună cam ciudat: *drepte care prelungite în mod nedefinit, de ambele părți, nu se întîlnesc în nici o parte*. Cum adică *nedefinit* s-au întrebat geometrii, chiar dincolo de limitele lumii finite? Adică pînă la infinit?... Astăzi nimeni nu mai gîndește astfel. *Finit* și *infinit* sînt noțiuni cu care ne-am obișnuit și le folosim în vorbirea de toate zilele chiar și cînd nu are rost, dar pe atunci, această întrebare constituia o problemă grea și răspunsul la ea a dat multă bătaie de cap! Mai ales că, după această definiție, urma și o axiomă, parcă *mai puțin axiomă* decît celelalte!

Axioma paralelelor

Vestita axiomă a paralelelor este bine cunoscută. Ea se enunță în mai multe feluri, dar iată definiția cea mai simplă: *Printr-un punct la o dreaptă nu se poate duce decît o singură paralelă.* Desigur că acest lucru este evident și oricine se poate convinge de aceasta desenînd. Întîi se trage cu rigla o dreaptă și se înseamnă un punct în afara dreptei. Apoi se așază echerul în așa fel ca o muchie a lui să se aștearnă pe dreaptă și se pune rigla pe oricare dintre celelalte două muchii. După aceea se lasă echerul să alunece pe riglă pînă ce prima muchie a lui trece prin punctul considerat. Oprindu-se mișcarea se trage cu creionul dreapta paralelă cu cea dată. Operația se numește *mișcare de translație* și prin ea se arată limpede că nu mai există vreo posibilitate de a se duce o altă paralelă la o dreaptă care să treacă tot prin același punct *Se vede limpede* aceasta și totuși, încă de pe vremea lui Euclid, geometrii nu s-au împăcat cu evidența acestui adevăr. Ei l-au privit mai mult ca pe o teoremă și au căutat să-l dovedească. Timp de peste 2000 de ani, zeci de mii de pene de gîscă s-au tot ascuțit și, zeci de litri de cer-

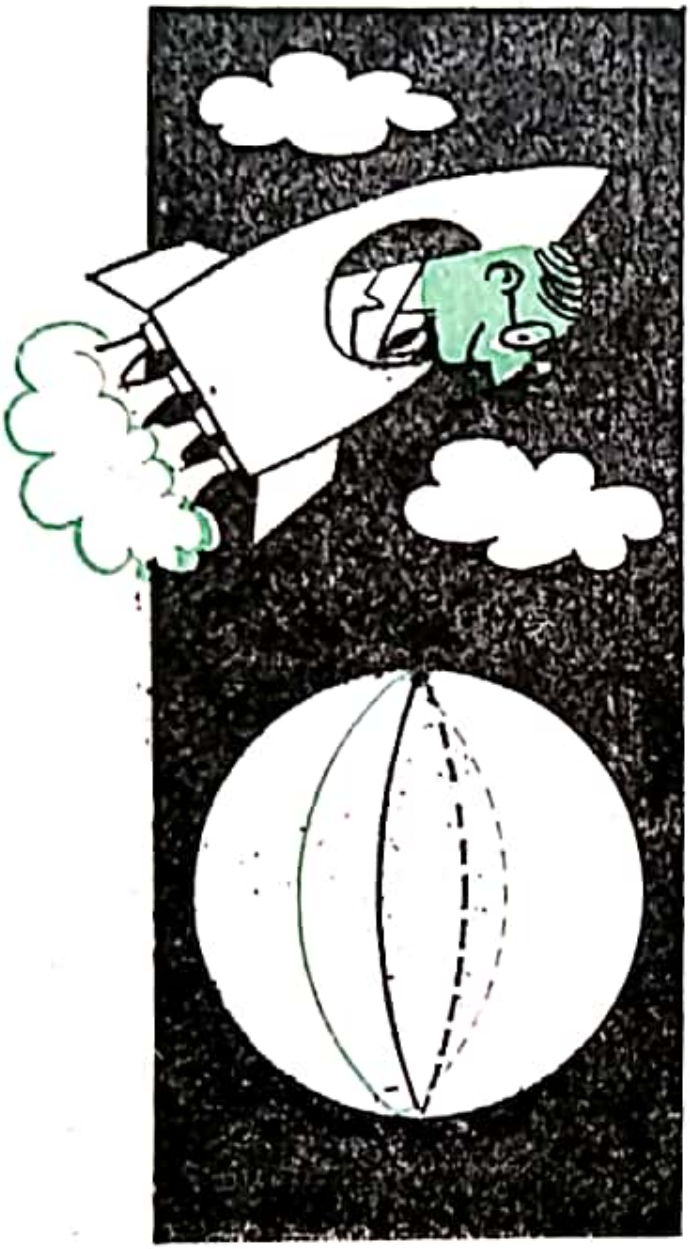


neală s-au tot vărsat prin călimări, numai şi numai ca să se găsească o demonstraţie pentru această axiomă a paralelelor. Dar, în loc să limpezească lucrurile, aburii de cereneală le-au înceţoşat tot mai mult. Azi, e uşor să vedem chiar cu ochii noştri, că matematicienii de atunci aveau dreptate să se îndoiască de axioma paralelelor fiindcă, de, fapt era aici ceva ce n-ar fi trebuit să fie! Să vedem ce anume!

Paralele pe o sferă

Să ne închipuim că desenul din figura de mai sus ar fi transpus pe cîmpia largă şi întinsă a Bărăganului, iar cele două drepte paralele ar fi nişte şine de cale ferată ce s-ar putea întinde într-o

parte pînă la Polul Nord și în cealaltă parte, pînă la Polul Sud. Să ne mai închipuim că ele ar fi fost destul de depărtate una de alta, ca să se poată vedea dacă ar fi privite dintr-o rachetă ce ar porni spre lună! Îndepărtîndu-se destul de pămînt, ca el să apară ca o sferă, s-ar constata cu surprindere că cele două paralele de pe Bărăgan și-au pierdut proprietatea de paralelism și se întîlnesc, nu o dată, ci chiar de două ori, exact așa cum se întîlnesc toate meridianele de pe globul terestru, în cei doi poli. Ce să însemne asta? Că nu ne mai putem încrede în adevărul evident — acela că, *există o paralelă și numai una singură care poate fi dusă dintr-un punct exterior unei drepte la acea dreaptă?* Da și nu! În cazul că planul a rămas plan chiar și atunci cînd este prelungit oricît de departe, atunci axioma paralelelor este adevărată. Dar dacă suprafața este numai în aparență plană fiindcă ea este o mică porțiune din suprafața sferei care se confundă cu un plan, atunci axioma nu-i adevărată. În acest caz pe această porțiune, *cercul meridian* pare că este o linie dreaptă. Căci pe o sferă nu există linii drepte și drumul cel mai scurt dintre două puncte de pe o sferă este un arc de meridian. Așadar, deși șinele de pe Bărăgan pă-



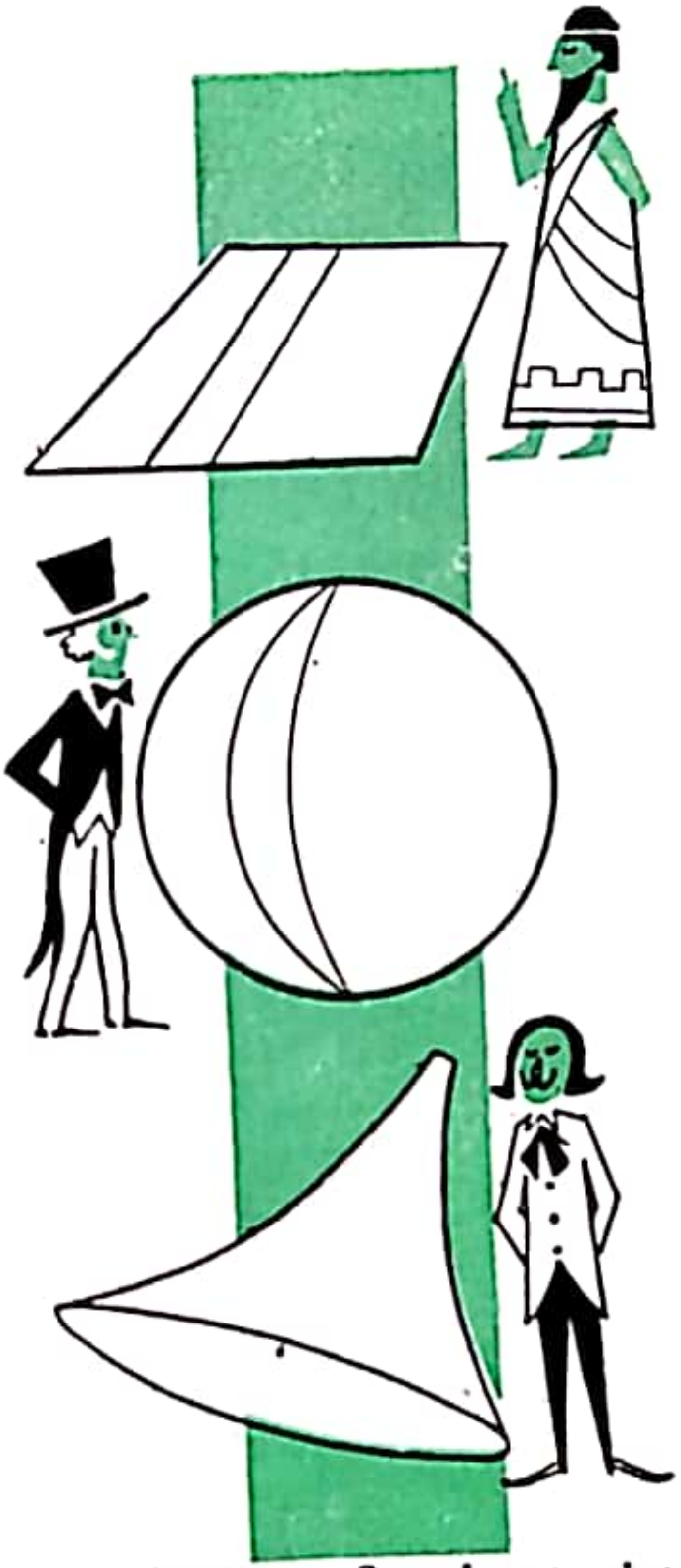
reau drepte paralele, în realitate ele nu erau drepte, ci arce de meridian care se întîlnesc în cei doi poli ai pămîntului. În acest caz, *nu se poate duce* dintr-un punct exterior nici o paralelă la dreapta dată. Cum apare acum această descoperire? Și mai ales dacă s-ar mai adăuga că, pe lîngă sferă, au mai fost găsite și suprafețe pe care dintr-un punct exterior al unei drepte *se pot duce nu una, ci un număr nelimitat de paralele?* Asemenea suprafețe au fost numite *pseudosfere* (sfere false) și ele seamănă la formă cu o pîlnie de trompetă sau cu floarea numită „rochița rîndunelei". Aceste rezultate, care se cunosc numai din secolul trecut, arată că, privit mai îndeaproape, nu-i tocmai evident adevărul despre paralela dusă dintr-un punct exterior la o dreaptă.

O geometrie sau mai multe geometrii?

Atît întrebarea cît și răspunsul ei sînt legate de axioma paralelelor. Ele au apărut ca o consecință a încercărilor, mereu repetate în cursul celor peste 2000 de ani, de a demonstra această axiomă a lui Euclid. Există numeroase lucrări, publicate chiar din antichitate, în care se afirmă că axioma paralelelor a fost demonstrată. Aceste lucrări au fost scrise de matematicieni de seamă și aveau uneori titluri răsunătoare ca: *Euclid reconstituit* sau *Euclid curățat de orice pată*. Însă, rînd pe rînd, alți matematicieni renumiți au arătat că autorii acestor lucrări, deși credeau că au corectat greșeala lui Euclid, de a fi confundat o axiomă cu o teoremă, au lăsat ei înșiși să se strecoare, în demonstrațiile întocmite de ei cu prea mult zel, cîte o greșeală! Așadar, axioma lui Euclid rămînea mai departe tot axiomă. Și totuși, se punea mereu întrebarea dacă n-ar putea exista o demonstrație, care nu s-a găsit încă? Acest impas a fost înlăturat dintr-o dată în jurul anului 1830, de către doi tineri matematicieni, care nu s-au cunoscut, fiind prea departe unul de altul: *János Bolyai* din Tîrgu Mureș și *Nikolai Lobacevski* din Kazan.

Ei au arătat că toate încurcăturile au la origine interpretarea greșită a noțiunii de axiomă. În loc să se considere că *axioma este un adevăr evident* și că de aceea *nu trebuie demonstrat*, trebuie să se considere că *axioma este un adevăr admis fără demonstrație*. Ca dovadă că e așa , ei au arătat că pornind de la acest principiu, dar admițînd ca axiomă că *printr-un punct la o dreaptă se pot duce o infinitate de paralele*, iar toate celelalte axiome din *Elemente* rămîn neschimbate, se creează o nouă geometrie, cu teoreme tot așa de logice și care nu se contrazic unele pe altele ca și acelea stabilite de Euclid. *Am creat din nimic un univers întreg*, așa a scris, plin de entuziasm, János Bolyai, tatălui său, în 1823, cînd a întrezărit, pentru prima oară, existența acestei noi geometrii. Astăzi se cunosc nenumărate geometrii. Ca să se deosebească între ele, se numește *geometrie euclidiană* aceea pe care a expus-o Euclid în *Elemente*, iar celelalte toate se numesc *geometrii neeuclidiene*, la care se mai adaugă de obicei pentru precizare și numele creatorului ei. Aceste *geometrii neeuclidiene* au aceeași structură ca și aceea a lui Euclid, însă diferă între ele prin axiomele alese ca punct de plecare. De pildă, în geometria lui Bolyai-

Lobacevski se demonstrează că *suma unghiurilor dintr-un triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte*. În geometria găsită de Riemann, în care se admite că *dintr-un punct la o dreaptă nu se poate duce nici o paralelă*, *suma unghiurilor dintr-un triunghi este mai mare decît două unghiuri drepte*. Cele trei suprafețe, despre care am vorbit mai înainte, *planul*, *sfera* și *pseudosfera* *sînt tocmai imaginile suprafețelor pe care sînt valabile aceste geometrii* și ar fi fost create dacă ar fi existat niște ființe-matematicieni, care să le stabilească, conform cu suprafața respectivă. Anume, pe *o suprafață plană, nu se poate crea decît geometria eucli-*

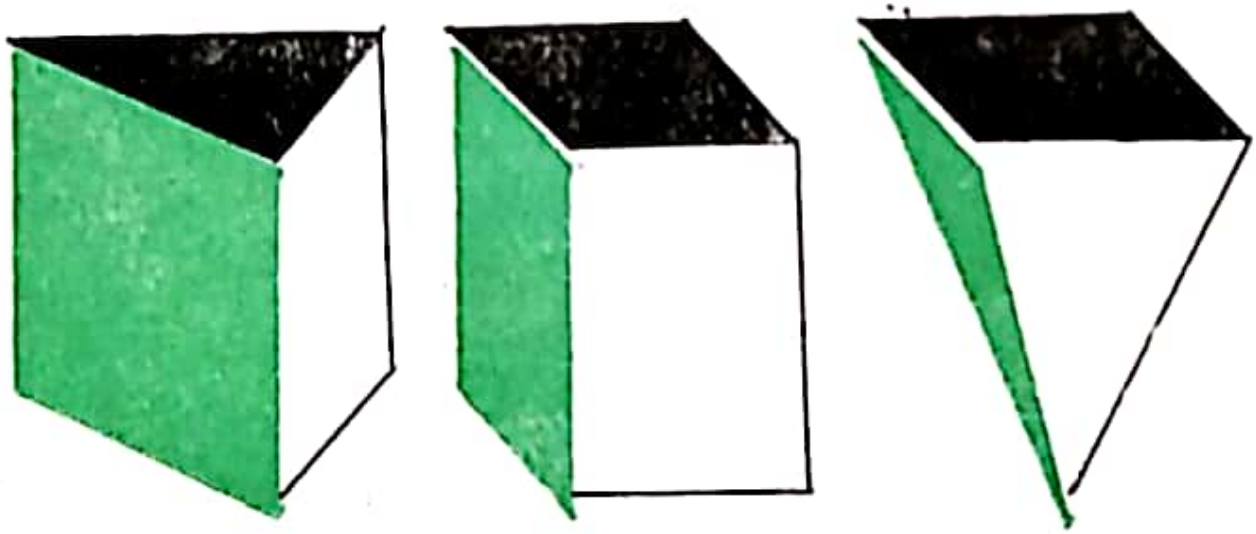


diană. Ea este și rămîne singura adevărată pentru noi pămîntenii, dar *pe o sferă*, geometria adevărată pentru ființele acelea, ce nu ar cunoaște planul — (de pildă niște ființe nemărginit de mici care ar trăi pe un atom) — este cea a lui Riemann și, pe o *pseudo-sferă*, cea a lui Bolyai și Lobacevski. Ba și pentru noi pămîntenii, atunci cînd ne punem probleme legate de *Universul întreg*, așa cum se întîmplă în teoria relativității a lui Einstein, tot geometria riemanniană este aceea care se aplică, fiindcă Universul în întregimea lui nu-i ca o suprafață plană, ci mai mult ca o sferă!

Forme spațiale

Mai sînt și alte probleme al căror studiu a fost stimulat de apariția *Elementelor*. De pildă, proprietățile corpurilor geometrice din spațiu care au fost mai puțin studiate înainte de Euclid. Euclid se ocupă de geometria în spațiu în cărțile XI, XII și XIII. O mare parte din teoremele aflate în cărțile XI și XII au fost stabilite anterior de

către Eudoxus, de Teetet și de Democrit, căruia i se atribuie și teorema despre volumul unei piramide și aceea despre volumul unui con. De altfel calculul volumului piramidei și acela al conului au fost cunoscute și de către egipteni, căci în scrierile lor se găsesc, de pildă, probleme cu rezultate exacte asupra volumului unui trunchi de piramidă, etc. Însă aria și volumul sferei nu au fost tratate în *Elemente*. Acestea au fost descoperite și expuse de Arhimede în lucrările lui, cam în aceeași epocă în care a trăit Euclid. Cartea a XI-a a Elementelor începe ca și Cartea I-a, cu definiții asupra: solidului, a perpendicularei pe un plan, a corpurilor solide: rotunde și poliedre. Cuvîntul poliedru este de origină greacă și e format din *polis* — *multe* și *hedra* — *față*, așadar un corp geometric mărginit de mai multe fețe plane. Ca și poligoanele din plan, poliedrele sînt convexe, concave, stelate,



regulate și neregulate. Numele unui poliedru se formează, ca și acela al poligoanelor, după numărul *fețelor* lor. Poliedrele cele mai des întîlnite în viața practică au căpătat însă și numiri proprii. Astfel în figură se văd o *prismă triunghiulară*, o *prismă dreptunghiulară*, care se mai numește încă și *paralelipiped*, și o *piramidă patrată*. Ea ne amintește de vestitele piramide din Egipt.

Poliedre regulate

Un fapt care a uimit pe geometrii Eladei a fost acela că, nu există mai mult decît *5 poliedre regulate*, pe cînd *poligoane regulate* se găsesc în număr nelimitat.

Platon a învățat cum se construiesc aceste poliedre regulate de la elevul său Teetet și tot de la el a aflat cum se dovedește că nu pot fi mai multe. În ultima sa carte, a XIII-a din *Elemente*, Euclid a stabilit metode de construire a poliedrelor regulate, și, mai mult decît atît, a arătat cum se face înscrierea acestor poliedre regulate într-o sferă.

Cîtă importanţă a dat Euclid faptului că numărul poliedrelor este limitat la 5 se poate constata din aceea că el îşi încheie *Elementele* cu demonstrarea acestei teoreme despre poliedrele regulate. Merită deci, să privim mai îndeaproape problema acestor poliedre regulate care a încîntat, mai întîi pe geometrii greci, apoi pe cei arabi şi, în urmă pe foarte mulţi geometrii din Europa şi de pretutindeni. Dar mai întîi, ce se înţelege printr-un poliedru regulat?

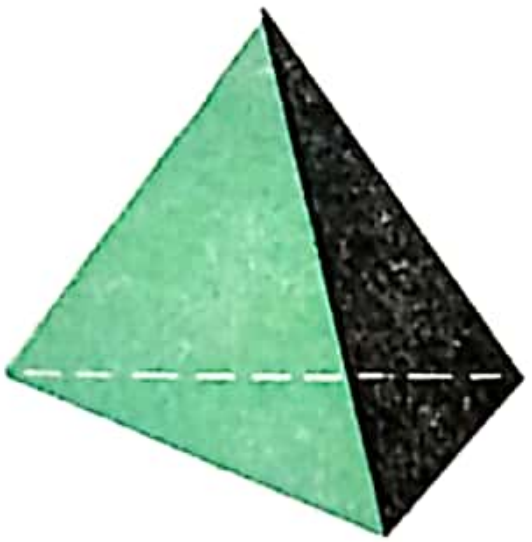
În dialogul intitulat *Timeu*, Platon a arătat care sînt *proprietăţile* poliedrelor regulate. Cel ce le explica era chiar Teetet (415—369 î.e.n.), care de fapt se ocupase cu aceste poliedre şi comunicase lui Platon rezultatele cercetărilor sale. Din cauza că Platon este acela ce a făcut cunoscute mai întîi poliedrele regulate, acestea s-au numit multă vreme *corpuri platonice*.

Poliedrul regulat este un corp geometric care are ca feţe plane numai poligoane regulate şi egale între ele, iar aceste feţe au aceeaşi înclinare, unele faţă de altele. Din această definiţie reiese clar corespondenţa dintre poligonul regulat şi poliedrul regulat, dar în stabilirea ei apar unele greutăţi. Anume, în cazul poligonului prin înclinarea laturilor unele faţă de altele se înţelegea *unghiul plan dintre două laturi* ale lui, fiindcă într-un vîrf al

unui poligon nu se întîlnesc mai mult de două laturi. La un poliedru însă, într-un vîrf al lui, ca de exemplu, acela al unei piramide, se pot întîlni mai multe fețe 3, 4, 5 etc. Așadar, noțiunea de *înclinare a fețelor* unele față de altele este mai complicată. Noi nu vom adînci această problemă ci ne vom mărgini să observăm că tocmai aici este

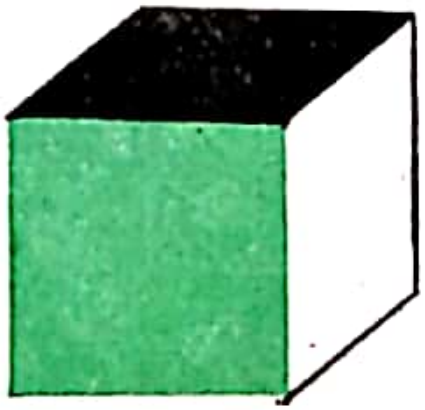
Ultimele două cărți din *Elemente*, care au fost adăugate ulterior, tratează tot despre poliedre regulate. Cartea a XIV-a a fost scrisă prin secolul II e.n. de Hipsicle din Alexandria și cuprinde determinarea relațiilor dintre ariile și volumele poliedrelor regulate, precum și înscrierea lor în sferă. Cartea a XV-a a fost scrisă de Damascinus, care conducea pe la 510 Școala din Atena. Teoremele pe care le enunță și le demonstrează sînt însă foarte incilcit expuse. Aceasta dă de bănuit că nici el singur nu le-ar fi înțeles. Ar fi vorba deci de transcrierea cursurilor ținute de profesorul lui, Isidor din Milet, un arhitect bine cunoscut atunci, unul dintre acei ce au construit biserica Sf. Sofia din Constantinopol.

cauza care limitează numărul poliedrelor regulate la următoarele cinci:



Tetraedrul, are patru fețe în formă de triunghiuri echilaterale. Cîte 3 fețe se întîlnesc într-un vîrf, așadar are 4 vîrfuri și 6 muchii. Prin forma lui simplă și armonioasă, tetraedrul a fost îndrăgit și folosit în motive de arhitectură și în arta decorativă. Filozofii greci din Școala lui Pitagora l-au ales ca simbol al substanței din care credeau că era format Universul. Și fiindcă după părerile de atunci — focul, aerul, pămîntul și apa erau considerate ca elementele primordiale ale acestei substanțe, tetraedrul era poliedru indicat ca să o reprezinte.

Cubul, este format din 6 patrate care se întîlnesc în 8 vîrfuri. Din fiecare vîrf pornesc 3 fețe. Doi matematicieni vestiți, Descartes și Euler, au stabilit independent unul de altul o formulă ușor de ținut minte:



$$F + V = M + 2$$

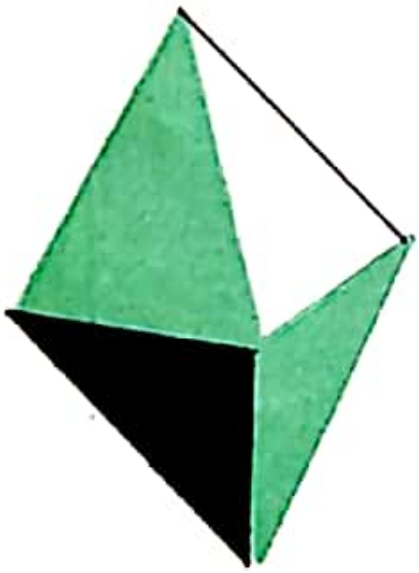
care permite să se afle numărul muchiilor (M) din acela al feţelor (F) şi al vîrfurilor (V). Ea arată că *numărul feţelor adunat cu al vîrfurilor este mai mare cu 2 decît numărul muchiilor.* Să verificăm formula în cazul tetraedrului şi apoi să o aplicăm la cub:

La tetraedru: 4 feţe + 4 vîrfuri = 6 muchii + 2

La cub: 6 feţe + 8 vîrfuri = 12 muchii + 2

Aşadar, fără să numărăm, am aflat că un cub are 12 muchii:

Octaedrul. După nume se poate ghici că are 8 feţe. Acestea sînt triunghiuri echilaterale. În fiecare vîrf se întîlnesc cîte 4 feţe. Numărul vîrfurilor este 6, iar al muchiilor tot 12 ca şi la cub, căci $8 + 6 - 2 = 12$! El se prezintă ca format de două piramide cu baza un patrat, suprapuse pe bază. Susţinut într-un vîrf, pare gata să-şi ia zborul. Acest echilibru nestabil, dar plin de graţie, a sugerat probabil geometrilor greci să considere octaedrul ca o imagine sau simbol al aerului, după cum



prin stabilitatea și impresia de soliditate ce o stîrnește cubul, el a fost privit ca simbol al pămîntului, iar tetraedrul, cu vîrful îndreptat spre cer ca o flacără, simboliza focul.

Dodecaedrul are 12 fețe, fiecare fiind un pentagon regulat, iar numărul vîrfurilor este de 20. În fiecare vîrf se întîlnesc cîte 3 fețe. Numărul muchiilor?

$$12 + 20 - 2 = 30$$

Este cel mai impunător dintre poliedrele regulate, căci prin forma lui, se apropie cel mai mult de sferă și de aceea i se spunea chiar *sfera din 12 pentagoane*.

Euclid a arătat că, înscriind toate poliedrele regulate într-o singură sferă, dodecaedrul le cuprinde pe toate în interiorul său. Această proprietate a făcut ca Pitagora și elevii lui să aleagă dodecaedrul ca simbol al Universului care, ca și acesta, cuprinde în interiorul lui tot ce există.

Icosaedrul are cele mai multe fețe: 20. Acestea sînt triunghiuri echilaterale și se întîlnesc cîte 5

într-un vîrf. Numărul total al vîrfurilor este de 12, iar numărul muchiilor, ca și la dodecaedru, 30.

Admirația față de aceste proprietăți de simetrie ale poliedrelor regulate au fost transmise din generație în generație, trezind mereu îndemn de a descoperi și alte caractere geometrice, care să aibă aplicații în știință și viață. Una dintre aplicațiile cele mai interesante s-a obținut în cercetarea cristalelor. Ori tocmai cristalele au fost acelea care au atras atenția oamenilor primitivi asupra poliedrelor regulate. Acum studiul poliedrelor regulate a putut permite, celor ce se ocupă de cristale, să elaboreze o teorie matematică a lor. O altă aplicație, tot așa de importantă deși de necrezut, apare în legătura stabilită între teoria poliedrelor și teoriile moderne ale algebrei!

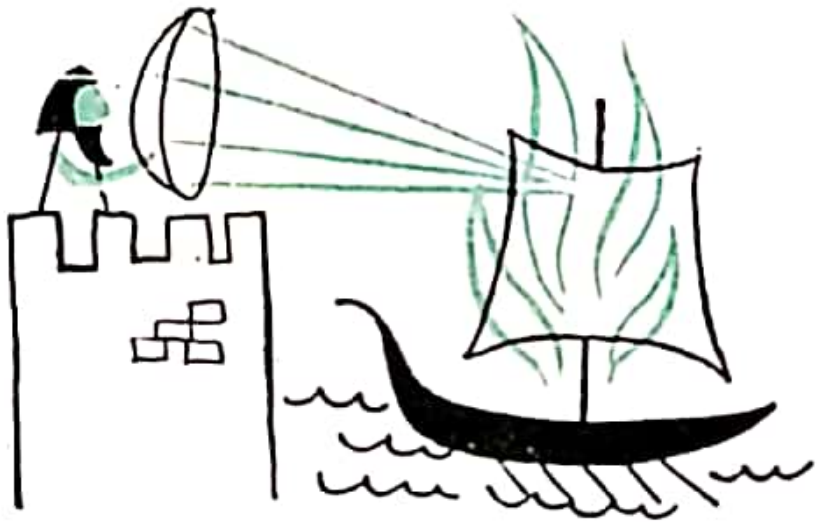
Dar oare mai înainte de greci, pe cine au fermecat aceste corpuri minunate? Răspunsul l-au dat săpăturile arheologice datorită cărora au fost descoperite, în multe părți din Europa, dodecaedre

și alte poliedre regulate, fie turnate din bronz, fie săpate în piatră. Primele aparțin culturii celte, iar cele de piatră sînt de origine etruscă. De altfel, nu-i de mirare că oamenii au cunoscut poliedrele regulate mai înainte de a fi existat geometria și poporul grec. Modelele acestor poliedre regulate le oferă natura însăși, prin formele ei cristalizate, așa că primii geometri care le-au observat le-au copiat după natură. Prin aceasta însă nu se știrbește cu nimic meritul matematicienilor greci, căci ei sînt aceia care le-au cercetat și descoperit proprietățile geometrice, au arătat cum se pot construi și ce relații există între elementele din care sînt compuse. Faptul că nu pot exista mai mult decît 5 poliedre regulate i-au îndemnat pe greci să caute și alte poliedre, care prin elementele lor de simetrie să se poată lua la întrecere în frumusețe cu poliedrele regulate! Acestea sînt *poliedrele semiregulate*.

Poliedre semiregulate

Aceste corpuri geometrice au ca fețe tot poligoane regulate, dar nu și egale între ele. Cel care le-a studiat îndeaproape a fost Arhimede, de aceea ele se mai numesc și *poliedre semiregulate arhimedice*. Majoritatea au fost obținute din poliedrele regulate, prin tăierea vîrfurilor cu un plan. Forma poliedrului semiregulat depinde de distanța de la vîrf a planului cu care se face secțiunea. Uneori, însăși numirea arată procedeul folosit pentru a le obține. De pildă *tetraedrul trunchiat* se obține dintr-un tetraedru tăindu-i vîrfurile prin plane paralele cu fețele sale și duse la o treime de vîrf. El este mărginit de 4 hexagoane regulate și de 4 triunghiuri echilaterale. În fiecare vîrf se întîlnesc 2 hexagoane cu un triunghi echilateral. Vîrfurile cubului pot fi tăiate, fie prin plane duse prin mijlocul distanței dintre două vîrfuri, fie la o altă distanță de vîrf. În primul caz se obține *cubooctaedrul* , numit așa fiindcă are ca fețe 6 patrate și 8 triunghiuri echilaterale, iar celălalt, *cubul trunchiat*, are cele 14 fețe ale sale formate din 6 octogoane și 8 triunghiuri echilaterale. În afară de aceste 3 poliedre semiregulate mai există

încă 10. Așadar, sînt 13 poliedre semiregulate și nu mai multe. S-au mulțumit oare matematicienii numai cu aceste poliedre, sau au creat și altele? În setea lor după frumos, ne așteptăm să fi căutat

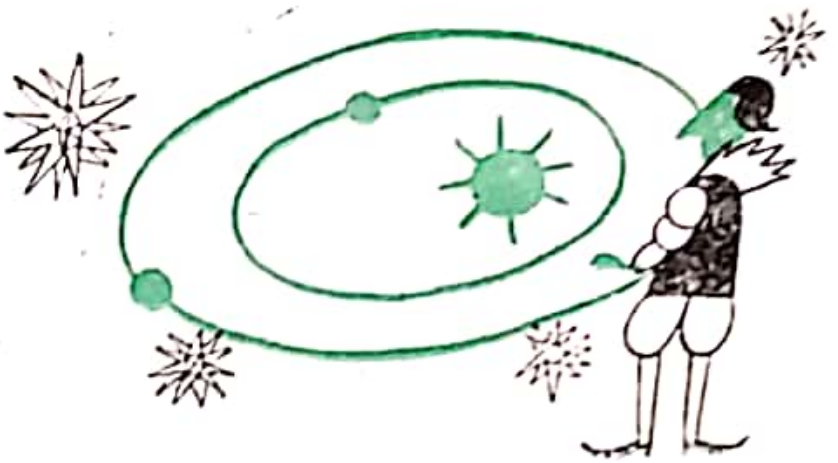


Despre Arhimede (287—212 i.e.n.) se spune că, dacă ar fi să se stabilească numele celor mai mari trei matematicieni din toate timpurile, numele lui Arhimede ar fi printre aceștia, dacă nu ar fi chiar primul. El a fost omorît de un soldat în timp ce Siracuza era ocupată, prin viclesug, de către romani. Se spune că Arhimede era așa de adîncit în problema al cărui desen îl făcuse pe nisip, încît atunci cînd un soldat roman a călcat pe desen el i-a spus mînios și fără să-l privească: *Nu te atinge de cercurile mele*, drept care „cuceritorul" l-a străpuns cu sabia.

Ca inginer el a realizat multe mașini care funcționau pe principii din fizică descoperite de el. A scris despre pîrghii, despre corpurile plutitoare și despre foarte multe alte probleme din mecanică. Se spune că a incendiat vasele romane concentrînd asupra lor căldura soarelui cu ajutorul unor oglinzi concave.

În această scurtă notă nu se poate arăta cît de importantă a fost contribuția lui Arhimede în matematici și în celelalte științe. Puterea lui de raționament a depășit obstacolele impuse de ni-

velul cunoștințelor de atunci, și a găsit soluții neașteptate la problemele cele mai variate, probleme care au fost puse și rezolvate abia în epoca modernă, adică începînd din secolul XVII înainte. Arhimede nu a scris numai o singură capodoperă, toate lucrările lui sînt capodopere și au fost izvor de inspirație pentru generațiile de învățați greci, arabi și europeni care s-au succedat secole de-a rîndul pînă la noi.



și alte poliedre demne de admirat. De data aceasta *poliedre regulate stelate* au fost găsite, de matematicienii europeni. Sînt 4 poliedre regulate

Johann Kepler (1571—1630) a stabilit o lege fundamentală în astronomie, anume că planetele descriu în jurul soarelui elipse în care soarele se află în unul dintre focare. Pe lîngă această descoperire extraordinară, pe care se sprijină astronomia modernă, Kepler s-a ocupat mult cu studiul poliedrelor regulate, semiregulate și a descoperit poliedrele stelate. El căuta să deducă din proprietățile lor o legătură între armonia acestor corpuri geometrice și armonia care există în sistemul planetar, sperînd să găsească astfel o explicație a stabilității sistemului planetar. Dar această explicație a fost dată mai tîrziu de Newton, cînd a descoperit legea gravitației universale.

stelate. Două dintre ele au fost descoperite în secolul al XVII-lea, de Johann Kepler, iar celelalte două, la începutul secolului al XIX-lea și de către L. Poinsot, care a stabilit și că nu pot exista mai multe. Trei dintre acestea au cîte 12 fețe stelate și de aceea toate trei poartă numele de *dodecaedru*. Unul este *micul dodecaedru* și altul *marele dodecaedru* și, în fine, al treilea — *marele dodecaedru stelat*. Al patrulea, avînd 20 de fețe, se numește *marele icosaedru*.

L. Poinsot **(1777-1859) își are numele legat de acela al poliedrelor regulate stelate, numite încă:** ***Poliedrele Kepler-Poinsot.*** **El s-a ocupat îndeaproape de teoria acestor corpuri geometrice și a publicat în 1810 un studiu amănunțit despre poligoane și poliedre regulate în care arăta și de ce nu este posibil să existe mai mult decît 4 poliedre regulate stelate.**

Alte suprafețe

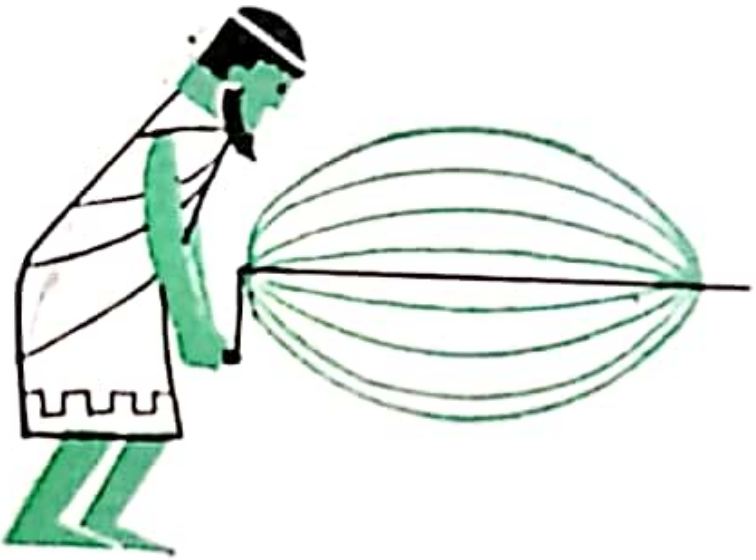
În ultimele trei cărți ale *Elementelor*, acelea destinate problemelor despre *formele spațiale*, Euclid cercetează anumite relații dintre dreaptă și plan, dintre elementele unui poliedru sau ale mai multor poliedre între ele, precum și acelea ce se pot ivi între suprafețele rotunde de forma con, cilindru

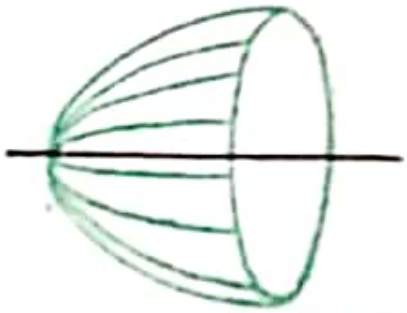
și sferă. Ca și în cazul geometriei plane, unde, după cum am văzut, Euclid nu a discutat decît problemele ce s-au născut din combinații de drepte și de cercuri, singurele care se pot desena numai cu rigla și compasul, și în aceste trei cărți, nu se vorbește nimic despre alte suprafețe în afară de cele amintite, desigur din cauza aceleiași restricții impuse în folosirea mijloacelor de construcții și a faptului că, o dată *Elementele* bine înțelese, se putea aborda orice problemă. Tocmai această expunere perfectă a problemelor elementare a trezit interesul pentru continuarea cercetărilor și, numai după 40 sau 50 de ani de la apariția *Elementelor*, Arhimede îi aduce completări substanțiale. Întîi prin studiul care l-a făcut și el în legătură cu poliedrele, descoperind și cercetînd proprietățile poliedrelor semiregulate, apoi arătînd cum se calculează și cît este de mare aria și volumul sferei. Și, în legătură cu sfera, Arhimede a dovedit că *volumul cilindrului circumscris sferei este egal cu* $\frac{3}{2}$ *din volumul sferei și tot același raport există și între ariile acestor două corpuri.* Această descoperire i-a fost atît de dragă, încît a cerut ca figura respectivă să-i fie săpată pe piatra de pe mormînt. Așa s-a făcut că, peste mai bine

de un secol, vizitînd Siracuza, Cicero a putut descoperi mormîntul lui Arhimede, uitat de toți și năpădit de buruieni. Tot Arhimede a studiat pentru prima oară suprafețele născute prin rotirea unei curbe plane în jurul unui ax din planul ei, — altele decît sfera, generată de un semicerc ce se rotește în jurul diametrului său, — și le-a determinat volumul. Asemenea rezultate au depășit cu mult pe acelea din epoca sa și la acestea, nici un matematician nu a mai adăugat nimic nou, pînă în secolul al XVIII-lea!

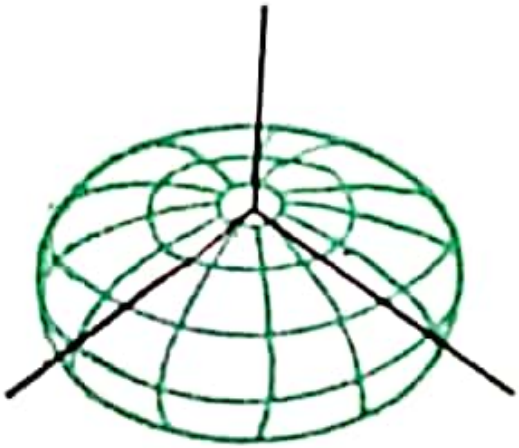
Cuadrice de rotație

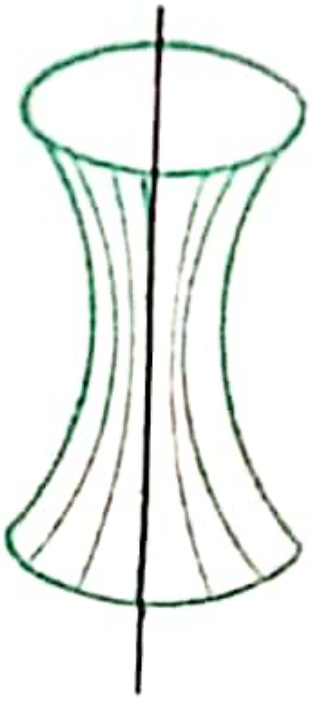
Printre suprafețele de rotație cercetate de Arhimede sînt demne de amintit cîteva, pe care matematicienii din vremea noastră le-au numit *cuadrice de rotație*. Aceste corpuri se formează fie prin rotirea unei elipse, fie prin a unei hiperbole sau a unei parabole în jurul unui diametru al lor. Despre ele Arhimede a scris o lucrare intitulată *Despre conoizi și sferoizi*. Prin *sferoid* — adică asemănător cu sfera, Arhimede înțelegea *elipsoidul de rotație*: corpul născut prin rotirea unei semielipse în





jurul diametrului. Cu înțelesul de *asemănător unui con*, *conoizii* reprezentau corpurile generate fie prin rotirea unei parabole în jurul axei sale (numit acum *paraboloidul de rotație*), fie prin rotirea unei hiperbole în jurul diametrului (azi *hiperboloidul de rotație cu două pînze*). E foarte





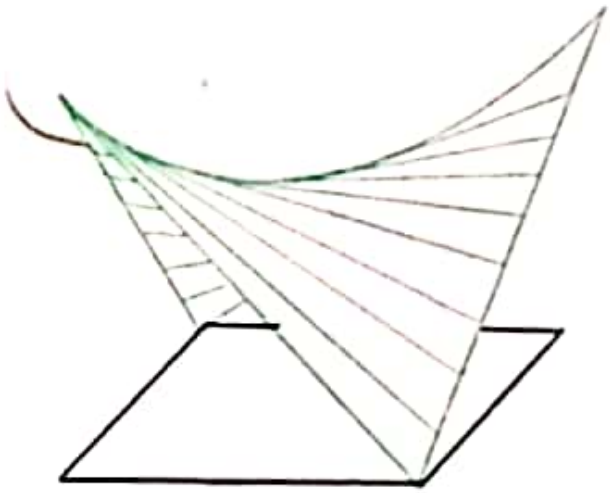
interesant de remarcat faptul că Arhimede a observat că sferoizii pot fi de două feluri: *sferoid alungit* sau *turtit*. Aceste corpuri diferite se obţin după cum elipsa se roteşte în jurul axei mici sau a celei mari. Se pare însă că el nu a băgat de seamă că acelaşi lucru se întîmplă şi în cazul hiperbolei! Anume că dacă şi hiperbola se roteşte în jurul celei de-a doua axe, atunci se naşte un corp nou, numit *hiperboloidul cu o pînză*. Aceste suprafeţe au multe aplicaţii în tehnică şi în viaţa zilnică. Nu vom menţiona aici decît că toate reflectoarele au forma paraboloidului de rotaţie şi că aceeaşi formă o capătă şi suprafaţa ce se formează cînd se roteşte un lichid închis într-un vas cilindric,

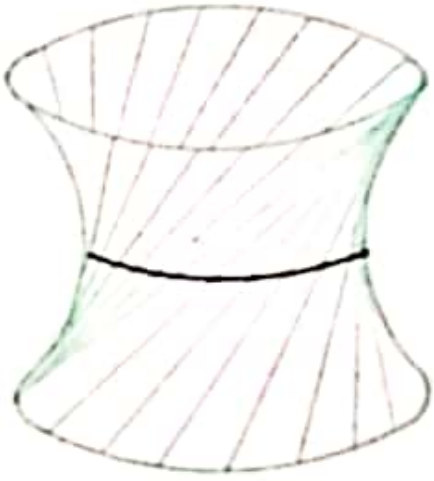
în jurul axei cilindrului. Proprietatea are o extraordinară aplicație practică, căci prin această metodă se obțin azi cele mai perfecte oglinzi parabolice cu mercur folosite în astronomie!

Suprafețe riglate

Dintre cuadricele de rotație, hiperboloidul cu o pînză are o proprietate curioasă, prin care se înrudește cu conul și cilindrul, deși nu seamănă deloc cu ele. Anume, pe toate aceste trei suprafețe se poate așterne în anumite direcții o linie dreaptă *cu toate punctele ei.* La cilindru și la con faptul este bine cunoscut căci aceste suprafețe se nasc din drepte — *cilindrul,* din mișcarea de translație a unei drepte, iar *conul* din mișcarea unei drepte ce trece printr-un punct fix. Dar aici la hiperboloidul cu o pînză, nu-i greu de observat această proprietate! ea este aplicată, în mod practic, la construirea coșurilor de această formă, prin întinderea firelor de ață, în două direcții deosebite, între găurile făcute în două cercuri ce servesc de bază, inferioară și superioară, a coșului. Mai există o cuadrică, însă nu de rotație, pe care se poate întinde o linie dreaptă în două direcții deosebite,

fără a o înțepa sau a ieși de pe suprafață, așa cum s-ar întîmpla dacă am încerca să o așezăm pe o sferă, pe un elipsoid sau pe un paraboloid. Această cuadrică se numește *paraboloidul hiperbolic*, și





Studiul sistematic al suprafeţei lor a început abia în secolul al XVII iar hiperboloidul cu o pînză şi paraboloidul hiperbolic au fost descoperite pe la sfîrşitul secolului al XVIII-lea. În *Elementele* lui Elucid nu sînt menţionate alte suprafeţe decît planul, prizma, piramida, cilindrul, conul şi sfera.

are formă de şa. Numele ei se trage de la curbele obţinute (parabole şi hiperbole) cînd suprafaţa este tăiată de plane duse în direcţii perpendiculare unul pe altul.

Conul, *cilindrul*, *hiperboloidul cu o pînză* şi *paraboloidul hiperbolic*, precum şi alte suprafeţe care au proprietatea de a cuprinde în anumite direcţii o linie dreaptă cu toate punctele ei, se numesc *suprafeţe riglate*. Ele au multe aplicaţii în tehnică şi mai ales în arthitectura modernă, ca de pildă acoperişuri în formă de paraboloid hiperbolic, scări în formă de spirală etc.

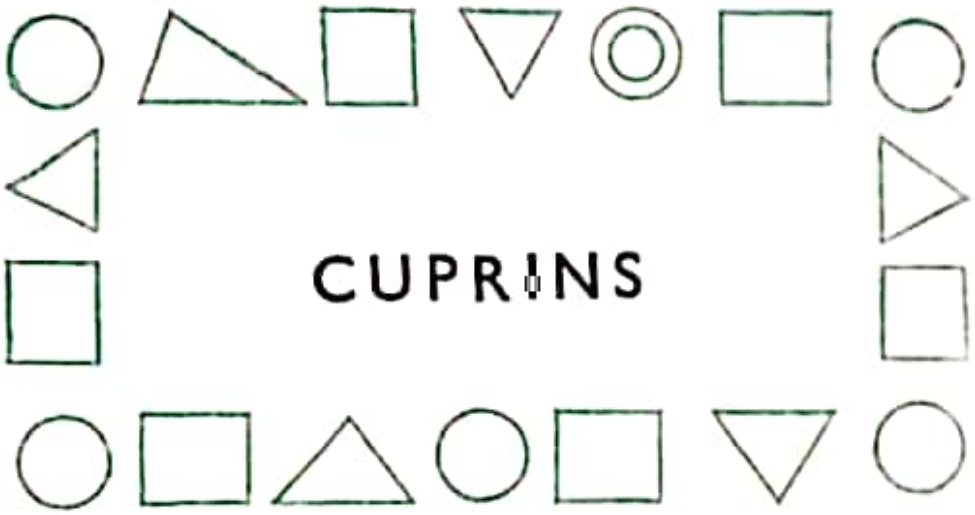
Printre linii şi suprafeţe

Cărticica de faţă a încercat să prezinte, ca într-un film de scurt metraj, cîteva dintre aspectele sub care anumite curbe şi suprafeţe au atras atenţia oamenilor. Ea nu are intenţia de a fi o carte de

învățătură, ci de informare și divertisment. Poate că unii dintre cititori, privind numeroasele ei figuri și puținele explicații, vor simți o tresărire de curiozitate ca un ecou venit din străfunduri, îndemnîndu-i să cunoască mai îndeaproape un capitol sau altul. Să nu ezite de a o face, cum n-a ezitat nici celebrul geometru Blaise Pascal pe cînd avea 12 ani, deși pe atunci, la începutul veacului al XVII-lea nu existau nici școli ca acum, nici manuale și nici prea multe cărți la îndemînă. La 12 ani auzise Blaise pentru întîia oară, despre geometrie și l-a întrebat pe tatăl lui ce este aceasta? Tatăl, care studiase geometria după *Elementele* lui Euclid, i-a dat explicațiile necesare crezînd că a satisfăcut pe deplin curiozitatea fiului său. După cîteva zile, Blaise i-a arătat tatălui său, cum a demonstrat el singur că suma unghiurilor dintr-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte. Văzînd demonstrația, acesta a înțeles că fiul său are talent pentru matematici și i-a dat să citească *Elementele* lui Euclid. Copilul le-a devorat, uitînd de altă joacă. Așa se explică de ce a fost primit la vîrsta de 14 ani în cercul savanților din Paris, unde se discutau probleme matematice. La 16 ani a compus o vastă lucrare intitulată *Eseuri asupra conicelor*,

care cuprindea peste 400 de teoreme asupra elipsei, hiperbolei și parabolei. Una dintre ele, considerată și azi printre *cele mai frumose teoreme ale geometriei* îi poartă numele.

Povestea lui Blaise Pascal, unul dintre cei mai mari matematicieni din lume, se poate repeta cu oricare dintre acei ce au ajuns la această ultimă filă și simt în ei dragostea și interesul pentru cercetarea științifică.



CUPRINS

Linia dreaptă 5
Distanța dintre două puncte 10
Unități vechi de lungime 12
Unghiul drept 13
Geometria este cu adevărat geometrie? 17
Ce este abstractizarea? 19
Cum au apărut teoremele? 21
Cine a pus bazele geometriei? 28
Cum s-au pus bazele geometriei? 34
Despre unghiuri și împărțirea lor 36
Trisecția unghiului 40
Triunghiuri 46
Patrulatere 48
Pentagoane 49
Poligoane regulate stelate 52
Linii curbe 53
Cicloida 56
Alte cicloide 59
Epicicloide 61

Secţiuni conice 62
Elementele lui Euclid 69
Drepte paralele 75
Axioma paralelelor 77
Paralele pe o sferă 78
O geometrie sau mai multe geometrii? 81
Forme spaţiale 84
Poliedre regulate 86
Poliedre semiregulate 94
Alte suprafeţe 97
Cuadrice de rotaţie 99
Suprafeţe riglate 102
Printre linii şi suprafeţe 104

Lector: AURELIA SZASZ
Tehnoredactor: ELENA GĂRĂJĂU

Apărut 1973 Comanda nr. 257 Tiraj 24.500 Broşate 22.500 +7|1 legate 2000 Coli de tipar 4

Tiparul executat sub comanda nr. 71674 la Întreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918", str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97, Bucureşti, Republica Socialistă România

EDITURA ION CREANGĂ

Lei 3